



**HAL**  
open science

# Systèmes fortement corrélés à une dimension : approximation de densité locale et dynamique sous l'effet des pertes

François Riggio

► **To cite this version:**

François Riggio. Systèmes fortement corrélés à une dimension : approximation de densité locale et dynamique sous l'effet des pertes. Physique [physics]. Université de Lorraine, 2023. Français. NNT : 2023LORR0160 . tel-04583570

**HAL Id: tel-04583570**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-04583570>**

Submitted on 22 May 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ  
DE LORRAINE**

**BIBLIOTHÈQUES  
UNIVERSITAIRES**

## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)  
*(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)*

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Systemes fortement corrélés à une dimension : approximation de densité locale et dynamique sous l'effet des pertes

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 11 Octobre 2023

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Lorraine**

**Mention : Physique**

par

François Riggio

sous la direction de

Dragi Karevski et Jérôme Dubail

### Composition du jury

<i>Président :</i>	Bertrand Berche	Professeur, Université de Lorraine
<i>Rapporteurs :</i>	Aurélia Chenu Leonardo Mazza	Professeur, Université du Luxembourg Maître de Conférences, Université Paris-Saclay
<i>Examineurs :</i>	Aleksandra Petkovic Bertrand Berche	Maître de Conférences, Université Paul Sabatier, Toulouse Professeur, Université de Lorraine
<i>Directeurs de thèse :</i>	Dragi Karevski Jérôme Dubail	Professeur, Université de Lorraine Chargé de Recherches, Université de Lorraine

# Remerciements

La thèse touche à sa fin et il est maintenant temps de remercier toutes les personnes qui m'ont accompagné durant ces trois ans. Tout d'abord, je remercie Aurélia Chenu, Aleksandra Petkovic, Leonardo Mazza et Bertrand Berche de m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie de mon jury de thèse. Je remercie également mes directeurs de thèse, Jérôme Dubail et Dragi Karevski, qui m'ont beaucoup appris durant ces trois ans de thèse au sein du LPCT. Mon passage dans ce laboratoire restera marqué par l'accueil et le professionnalisme de son personnel. Je tiens à remercier spécialement Séverine et Véronique, qui sont toujours là pour faciliter les démarches administratives et qui abattent un travail colossal. Je n'oublie pas non plus, Fabien et Christian qui ont pris sur leur temps pour m'aider à régler des problèmes informatiques que personne n'avait encore rencontré auparavant. Merci à vous. Je remercie également mon collègue et ami Valentin avec qui je pouvais parler de tout pendant des heures. Merci à Andy et Mohamed pour les petites discussions qui permettaient de sortir la tête des équations pendant quelques minutes. Je suis très reconnaissant envers Ali, Michele, Claude et Lorenzo d'avoir partagé leurs connaissances sur des domaines scientifiques proches du mien. J'ai pu étoffer ma culture scientifique grâce à vous et je vous en remercie. Je remercie Laurent Chaput et l'équipe pédagogique de la filière MFE pour m'avoir donné l'opportunité d'assurer les travaux dirigés de mathématiques à deux reprises. Un grand merci à Maxime Lesur et Jean-Christophe Tremblay pour avoir suivi mon travail dans le cadre du CSI.

Si j'ai été capable de mener à bien cette thèse, c'est aussi grâce aux enseignements que j'ai reçu de la part de mes professeurs tout au long de ma scolarité. En premier lieu, je me dois de remercier Christophe Gill, mon professeur de physique-chimie de terminale, qui m'a conforté dans mon choix d'étudier la physique. Je n'oublierai jamais la manière singulière que vous aviez de rendre les cours captivant et intéressant. Merci. A mon entrée à l'université, j'ai eu la chance de suivre les cours d'enseignants géniaux qui ont été pour moi une grande source de motivation, un objectif à atteindre. Merci à Bertrand Berche, Dragi Karevski, Christophe Chatelain, Etienne Gravier, Thierry Gourieux et Daniel Malterre. C'est grâce à vous que j'en suis là aujourd'hui.

Ces remerciements ne sauraient être complets sans mentionner mes proches. Je remercie l'ensemble de ma famille et belle-famille pour m'avoir soutenu durant ces trois années de doctorat. En particulier, il me tient à cœur de citer mes parents, Marie et Francesco, qui m'ont accompagné et encouragé pendant l'intégralité de mon cursus universitaire. J'espère vous avoir rendu fiers, parce que moi je suis particulièrement fier d'être votre fils. J'ai tellement de chance de vous avoir, je vous embrasse. Enfin, comment ne pas remercier Ambre, qui partage ma vie depuis presque six ans. Je n'aurais pas vécu ces trois années de la même manière sans toi. Tu m'as permis de donner le meilleur de moi-même et de surmonter les périodes de doute qui ponctuent parfois une thèse de doctorat. Ces trois années de thèse que nous avons passé ensemble, nous ont encore plus rapprochés. C'était une aventure loin de tout repos, mais je suis heureux d'avoir passé cette épreuve à tes côtés. L'avenir avec toi s'annonce radieux, merci encore ma chérie.



# Sommaire

Résumé	xiv
Articles de références	xv
<b>Partie I Introduction à la physique des atomes froids</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexte historique de la physique à basse température</b>	<b>2</b>
1.1 Emergence de la physique à basse température . . . . .	2
1.2 Explication des comportements quantiques observés . . . . .	3
1.3 Physique de la matière ultra froide . . . . .	4
1.4 Particularité de la physique à une dimension . . . . .	5
1.5 Nouveautés et sujets ouverts . . . . .	6
<b>2 Le modèle de Lieb-Liniger</b>	<b>8</b>
2.1 L'ansatz de Bethe . . . . .	8
2.1.1 Excitations du modèle . . . . .	11
2.1.2 Limite thermodynamique . . . . .	12
2.1.3 Excitations dans la limite thermodynamique . . . . .	14
2.2 Régime de forte interaction . . . . .	15
2.3 Régime de faible interaction . . . . .	17
<b>3 L'approximation de densité locale</b>	<b>19</b>
3.1 Principe de la méthode . . . . .	19
3.2 Application au modèle de Lieb-Liniger . . . . .	20
3.3 Échecs de la LDA . . . . .	22
<b>4 Dynamique d'un système quantique ouvert</b>	<b>26</b>
4.1 Couplage système-environnement . . . . .	26
4.1.1 Dissipation d'énergie . . . . .	26
4.1.2 Evolution temporelle du système . . . . .	27

---

<b>5</b>	<b>Dynamique dans l'espace des phases</b>	<b>30</b>
5.1	Transformée de Weyl et fonction de Wigner . . . . .	30
5.2	Evolution temporelle de la fonction de Wigner . . . . .	31
5.3	Comparaison avec la GHD . . . . .	33
 <b>Partie II Résultats</b>		 <b>38</b>
<b>6</b>	<b>Au delà de l'approximation de la densité locale</b>	<b>39</b>
6.1	Corrections à la LDA : principe de la méthode . . . . .	39
6.1.1	Identification du coefficient $\alpha(\gamma)$ . . . . .	41
6.1.2	Identification du coefficient $\beta$ . . . . .	42
6.2	Limite de Tonks-Girardeau . . . . .	43
6.2.1	Cas du coefficient $\alpha$ . . . . .	44
6.2.2	Cas du coefficient $\beta$ . . . . .	44
6.3	Limite de Gross-Pitaevskii . . . . .	46
6.3.1	Cas du coefficient $\alpha$ . . . . .	46
6.3.2	Cas du coefficient $\beta$ . . . . .	47
6.4	Sommation numérique des facteurs de formes pour le modèle de Lieb-Liniger . . . . .	47
6.4.1	Construction des états propres du modèle LL et calcul des facteurs de formes . . . . .	47
6.4.2	Calcul des coefficients $\alpha$ et $\beta$ . . . . .	50
6.4.3	Applications . . . . .	52
6.5	Conclusion du chapitre . . . . .	54
<b>7</b>	<b>Effets des pertes atomiques sur un gaz de fermions sur réseau</b>	<b>56</b>
7.1	Modèle et hypothèses . . . . .	56
7.1.1	Modèle du gaz de Tonks-Girardeau sur réseau soumis à des pertes à $K$ corps . . . . .	57
7.1.2	Hypothèse de pertes adiabatiques . . . . .	58
7.1.3	Lente évolution de la distribution de rapidité . . . . .	59
7.2	La fonctionnelle de perte . . . . .	61
7.2.1	Cas des pertes à un corps : $K = 1$ . . . . .	61
7.2.2	Cas des pertes à deux corps : $K = 2$ . . . . .	63
7.2.3	Généralisation aux pertes paires . . . . .	64
7.2.4	Généralisation au cas des pertes impaires . . . . .	64

---

7.3	Évolution temporelle de la distribution de rapidités et de la densité de particule . . . . .	66
7.3.1	Effet des pertes à un corps . . . . .	66
7.3.2	Effet des pertes à deux corps . . . . .	69
7.3.3	Effet des pertes à $K$ corps . . . . .	75
7.4	Dynamique du gaz de fermions inhomogène sous l'effet des pertes . . .	79
7.4.1	Simulation de la dynamique dans l'espace des phases . . . . .	80
7.4.2	Résultats . . . . .	81
7.5	Conclusion du chapitre . . . . .	85
	<b>Conclusion générale</b>	<b>87</b>
	<b>A Relation entre le modèle de Lieb-Liniger et la chaîne XXZ</b>	<b>90</b>
	<b>B Résolution de l'équation (7.43)</b>	<b>93</b>
B.1	Pertes à un corps . . . . .	93
B.2	Pertes à deux corps . . . . .	94
	<b>C Effet de la température sur le premier mode de Fourier de <math>\rho_0(k)</math></b>	<b>96</b>
C.1	Contexte . . . . .	96
C.1.1	Régime de hautes températures . . . . .	96
C.1.2	Régime de basses températures . . . . .	97
	<b>Bibliographie</b>	<b>99</b>



# Table des figures

1.1	Cette image montre, en fausses couleurs, la formation d'un condensat de Bose-Einstein obtenu par le Cold Atom Laboratory prototype du NASA Jet Propulsion Laboratory. Le condensat apparaît lorsque la température passe en dessous d'une température critique $T_c$ et est caractérisé par une densité très piquée (visible en 2D et 3D sur l'image). Cette image est issue de la banque d'images de la NASA ( <a href="https://images.nasa.gov/">https://images.nasa.gov/</a> ) et est dans le domaine public ( <a href="#">Creative Commons site</a> ). . . . .	4
2.1	Schéma montrant comment sont construits les coefficients $f(P)$ . Ici on considère un système à $N = 3$ particules vivant dans la région $R : x_1 < x_2 < x_3$ . Pour obtenir le coefficient $f(P_{321})$ correspondant au triplet de rapidité $(\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1)$ , on écrit la configuration de base $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ au-dessus de la configuration $(\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1)$ . On relie ensuite par une droite les rapidités identiques d'une configuration à l'autre et à chaque intersection on note la phase de diffusion $\theta$ . Le coefficient $f(P_{321})$ est alors écrit comme le produit $f(P_{321}) = (-1)^3 \exp\{-i(\theta_{32} + \theta_{31} + \theta_{21})\}$ , où $\theta_{jk} = \theta(\lambda_j - \lambda_k)$ . . . . .	10
2.2	La distribution de rapidité pour différentes valeurs de $\gamma$ . A mesure que la force d'interaction augmente, la densité de rapidité s'étale pour devenir finalement constante sur son domaine de définition quand $\gamma \rightarrow \infty$ . Cette figure est une reproduction de la figure 2 de la référence [1] . . . . .	13
2.3	Dépendance de grandeurs du modèle de Lieb-Liniger avec le paramètre $\gamma$ . En vert, la valeur limite de la rapidité $\Lambda$ et sa valeur asymptotique pour $\gamma \rightarrow \infty : \pi\rho$ . En bleu, l'énergie moyenne par particules $e(\gamma) = E_0/\rho^2 N$ et sa valeur asymptotique $\gamma \rightarrow \infty : \pi^2/6$ . En rouge, l'énergie moyenne par particules $\mu(\gamma) = \rho^2(3e(\gamma) - \gamma e'(\gamma))$ et sa valeur asymptotique $\gamma \rightarrow \infty : \pi^2\rho^2/2$ . Les valeurs asymptotiques sont celles d'un gaz de fermions libres sans spin. Cette figure est une reproduction de la figure 1 de la référence [1] . . . . .	14
3.1	Illustration représentant les trois échelles de longueurs existantes pour un gaz d'atomes froids. . . . .	20
3.2	Evolution du rapport $\Omega_b/\Omega_z$ en fonction du paramètre $\Lambda$ qui dépend du nombre de particule $N$ , de $a_z = \sqrt{\hbar/m\Omega_z}$ et de $a_{1D} = -2\hbar/mg$ . Les courbes colorées sont issues de simulations Monte Carlo. La LDA est représentée par la courbe noire tandis que l'approximation de Hartree est représentée par les pointillés noirs. Les points noirs et les carrés bleus sont des données expérimentales provenant respectivement de [2] et [3]. Cette figure est tirée, avec permission, de la référence [4], Copyright(2015) par l'American Physical Society. . . . .	23

---

3.3	Densité de fermions non appariés selon la LDA en pointillés et selon la LDA corrigée en trait plein. Les termes correctifs permettent de retrouver cette structure en pic qui échappe à la LDA standard. Cette figure est tirée, avec permission, de la figure 2 de la référence [5], Copyright(2006) par l’American Physical Society. . . . .	24
4.1	Schéma symbolisant un système ouvert et son environnement. Les couplages sont représentés par les zigzags qui connectent donc le système et l’environnement. . . . .	27
5.1	Dynamique de la fonction de Wigner d’un système de $N = 10$ fermions sans interactions initialement plongés dans un potentiel harmonique. Le quench du potentiel harmonique vers le potentiel $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + U_0 \exp\{-x^2/\sigma^2\}$ est réalisé avec $\hbar = m = 1$ , $\omega = 1/\sqrt{2}$ , $dt \sim 0.14/\omega$ , $U_0 \simeq 21.2 \hbar\omega$ et $\sigma \simeq 30 x_0$ . . . . .	33
5.2	Représentation de la vitesse effective, tirée du cours [6] de B. Doyon. La vitesse effective est la résultante de l’ensemble des collisions entre une particule et les $N - 1$ autres. . . . .	35
5.3	Dynamique de la distribution $\rho(\lambda, x)$ pour un système de $N = 10$ bosons de cœur dur ( $\gamma = 10^{10}$ ) initialement plongés dans un potentiel harmonique. L’évolution temporelle est obtenue par la résolution des équations de la GHD avec un potentiel dépendant du temps $U(x, t < t_0) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + U_0 \sin\left(\frac{\pi t}{2t_0}\right) \exp\{-x^2/\sigma^2\}$ . Les paramètres de la simulations sont $\hbar = m = 1$ , $\omega = 0.5$ , $dt = 0.025/\omega$ , $U_0 = 20\hbar\omega$ , $\sigma = 3 x_0$ et $\lambda_0 = \sqrt{\hbar m \omega}$ . Pour $t > t_0$ , le potentiel $U(x, t)$ est éteint et l’évolution du système est libre. . . . .	36
5.4	Evolution temporelle de la densité moyenne de particule $n(x, t)$ dans le plan $(x, t)$ . Le potentiel considéré ici dépend du temps $U(x, t < t_0) = m\omega^2 x^2/2 + U_0 \sin\left(\frac{\pi t}{2t_0}\right) \exp\{-x^2/\sigma^2\}$ et identique à celui utilisé dans l’article [7]. Les paramètres sont fixés à $\omega = 0.5$ , $\omega t_0 = 3$ , $U_0 = 20 \hbar\omega$ et $\sigma = 3\sqrt{\hbar/m\omega}$ , avec $\hbar = m = 1$ . Le paramètre de Lieb vaut $\gamma = 10^{10}$ . Au delà de $t = t_0$ le potentiel est éteint et le système évolue librement. . . . .	37
6.1	Schéma de la configuration de nombres de Bethe correspondant à l’état fondamental d’un système avec $N = 6$ particules. Les bulles vides sont les nombres de Bethe dont l’accès est autorisé par le cut-off. Les nombres de Bethe sont indiqués au dessus des bulles. . . . .	48

---

6.2	La susceptibilité linéaire pour les modes $q$ les plus faibles selon le type d'excitations considérées. Le paramètre de Lieb et la densité sont fixés $\gamma = 1$ et $\rho_0 = 1$ . Les états excités à deux paires et trois paires particule/trou sont générés avec un cut-off dont la valeur est $\kappa = 16\pi/L$ . Les croix bleues correspondent à la susceptibilité linéaire calculée avec uniquement des états excités à une paire particule/trou, les croix rouges représentent la susceptibilité linéaire calculée avec les états à une et deux paires particule/trou. Enfin les cercles verts montrent l'allure de la susceptibilité linéaire déterminée avec des états à une, deux et trois paires particule/trou. A gauche la taille du système est $L = 20$ tandis qu'à droite la taille du système est $L = 40$ . Cette figure est tirée, avec permission, de l'article [8], Copyright(2022).	49
6.3	Contribution des états à une paire particule-trou à la susceptibilité linéaire $\tilde{\chi}$ pour le mode $q = \frac{8\pi}{L}$ . Le nombre de particule est $N=150$ et la densité homogène est fixée $\rho_0=0$ . La susceptibilité est calculée pour trois valeurs du paramètre de Lieb $\gamma$ et les états excités notés $ 1\rangle$ sont indiqués à droite sous le forme de séquences de nombre de Bethe.	50
6.4	A gauche : la susceptibilité linéaire $\tilde{\chi}(q)$ (croix bleues) en fonction des modes $q$ pour une taille de système $L = 200$ , une densité $\rho_0 = 1$ et un paramètre de Lieb $\gamma = 1.0$ . Pour les petites valeurs de $q$ la susceptibilité est bien décrite par un fit (courbe orange) en $a_1 + a_2 q^2 + a_3 q^4$ dont les coefficients $a_1$ et $a_2$ sont à identifier, via la relation (6.9), respectivement à la compressibilité $\tilde{\chi}(0)$ et à la courbure de la susceptibilité $d^2\tilde{\chi}(0)/dq^2$ . A droite : le coefficient $\alpha$ comme une fonction de $\gamma$ pour différentes tailles de système $L = 100$ , $L = 150$ et $L = 200$ . Les comportements asymptotiques prédits analytiquement sont représentés en pointillés rouge pour le régime de Gross-Pitaevskii où $\alpha(\gamma \rightarrow 0) = \frac{1}{4\gamma^2}$ et en pointillés magenta pour le régime de Tonks-Girardeau où $\alpha(\gamma \rightarrow \infty) = -\frac{1}{12\pi^4}$ . Ces figures sont tirées, avec permission, de l'article [8], Copyright(2022) par l'American Physical Society.	51
6.5	A gauche : la susceptibilité non linéaire $\tilde{\phi}(q_1, q_2)$ est représentée par la variation de couleur dans le plan $(q_1, q_2)$ pour $L = 150$ , $\rho_0 = 1$ et $\gamma = 3 \times 10^5$ . Les pointillés blancs sont issus d'un fit en $a_1 + a_2 q_1 q_2 + a_3 q_1^2 + a_4 q_2^2$ et le coefficient $a_2$ permet de calculer $\beta$ conformément à la relation (6.13). A droite : le coefficient $\beta$ comme une fonction de $\beta$ pour trois tailles de système différentes $L = 100$ , $L = 150$ et $L = 200$ . Les pointillés magenta correspondent à la valeur prédite théoriquement dans la limite de Tonks-Girardeau $\beta(\gamma \rightarrow \infty) = -\frac{1}{8\pi^6}$ . Ces figures sont tirées, avec permission, de l'article [8], Copyright(2022) par l'American Physical Society.	52

6.6	<p>Profil de densité du gaz de Bose unidimensionnel en présence de potentiels de piégeage. La courbe noire représente le profil de densité obtenu par une simulation DMRG, la courbe orange correspond au profil de densité prédit par la LDA standard et la courbe en pointillés rouges constitue la LDA corrigée par le terme <math>B</math> (voir Eq. (6.2)). Le potentiel est une barrière de forme gaussienne <math>V(x) = V_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}</math> avec <math>V_0=0.00013</math> et <math>\sigma = 55(= 2.27\rho_\infty^{-1})</math>. La quantité <math>\rho_\infty</math> désigne la densité loin de la barrière. La petite figure insérée montre une vue d'ensemble du système, loin du centre de la barrière la densité est quasiment homogène. La healing length représentée en bleu permet de justifier l'emploi de la LDA et montre que le potentiel ne varie que très peu à l'échelle de <math>\xi_{\text{heal}}</math>. Cette figure est tirée, avec permission, de l'article [8], Copyright(2022) par l'American Physical Society. . . . .</p>	53
6.7	<p>Profils de densité du gaz de Bose unidimensionnel en présence de potentiels de piégeage. Pour les deux figures, la courbe noire représente le profil de densité obtenu par une simulation DMRG, la courbe orange correspond au profil de densité prédit par la LDA standard et la courbe en pointillés rouges constitue la LDA corrigée par le terme <math>B</math> (voir Eq. (6.2)). A gauche, le potentiel de piégeage est un double puits <math>V(x) = 1.8 \times 10^{-12} x^4 - 10^{-7} x^2</math> et <math>\rho_{\text{max}}</math> est la densité maximum. A droite, le potentiel est un double puits asymétrique <math>V(x) = 1.25 \times 10^{-12} x^4 - 1.18 \times 10^{-7}(x + 10)^2</math> et là encore <math>\rho_{\text{max}}</math> est la densité maximum. Nous avons indiqué en bleu la healing length afin de montrer que les variations du potentiel se font sur des distances plus grandes que <math>\xi_{\text{heal}}</math>. Ces figures sont tirées, avec permission, de l'article [8], Copyright(2022) par l'American Physical Society. . . . .</p>	54
7.1	<p>Ce schéma illustre le modèle de bosons de cœur dur soumis au processus de pertes pour les cas <math>K = 1</math>, <math>K = 2</math>, et <math>K = 3</math>. Le fond bleu représente l'environnement tandis que les sphères roses et blanches correspondent respectivement aux sites occupés et sites vacants. Les fines flèches noires indiquent quels mouvements sont autorisés pour les bosons et les larges flèches noires montrent le phénomène de perte. Dans chacun des cas, nous retirons <math>K</math> atomes consécutifs. . . . .</p>	58
7.2	<p>Effets des pertes à un corps sur différentes distributions de rapidité. A l'instant initial les distributions de rapidité sont données par une distribution de Fermi-Dirac <math>\rho_0(k) = (1 + \exp\{-\cos(k)/T\})^{-1}</math> où <math>T</math> est la température. Les courbes colorées sont issues de la résolution numérique de l'équation (7.44) avec la méthode de Runge-Kutta et la courbe en pointillés noirs est la solution analytique (7.48). L'accord entre les résultats numériques et analytiques est parfait même quand il ne reste presque plus d'atomes dans le système. . . . .</p>	68

7.3	Comportement aux temps longs du rapport $\rho(k, t)/n(t)$ pour différentes distributions initiales. a) En bleu, la distribution initiale prise comme une distribution de Fermi-Dirac $\rho_0(k) = (1 + \exp(-\cos(k)/T))^{-1}$ avec une température $T=0.1$ . En rouge, l'allure de la distribution quand $t \rightarrow \infty$ obtenue avec la solution analytique (7.48). La courbe en pointillés noirs représente un fit numérique avec une distribution de Boltzmann $a_1 \exp\{\cos(k)/a_2\}$ . b) En bleu, la distribution initiale prise comme une distribution non thermique $\rho_0(k) = (1 - \cos(sk))/2$ . En rouge la distribution à des temps infinis. Cette dernière est clairement incompatible avec état thermique. . . . .	69
7.4	Effets des pertes à deux corps sur différentes distributions de rapidité. A l'instant initial les distributions de rapidité sont données par une distribution de Fermi-Dirac $\rho_0(k) = (1 + \exp\{-\cos(k)/T\})^{-1}$ où $T$ est la température. Les courbes colorées sont issues de la résolution numérique de l'équation (7.52) avec la méthode de Runge-Kutta et la courbe en pointillés noirs est la solution analytique (7.55). Là encore le numérique est en parfait accord avec la prédiction analytique. . . . .	71
7.5	Evolution temporelle de la densité moyenne de particules sous l'effet des pertes à deux corps pour différentes distributions de rapidité. Les courbes pleines représentent le ratio $n(t)/n(0)$ pour des distributions initiales thermiques tandis que les courbes en pointillés noirs et jaunes sont obtenues avec des distributions non thermiques ayant respectivement un premier mode de Fourier non nul et pas de premier mode de Fourier. Le comportement au temps long est comparé avec les valeurs théoriques (7.56) où $n(t) \sim 1/t$ (pointillés verts) pour des distributions sans premier mode de Fourier et (7.61) où $n(t) \sim 1/\sqrt{t}$ (pointillés gris) pour des distributions avec un premier mode de Fourier non nul. . . . .	73
7.6	Comportement aux temps longs de différentes distributions de rapidité normalisées par la densité correspondante sous l'effet des pertes à trois corps. Les courbes bleues représentent le rapport $\rho(k, 0)/n(0)$ , soit la distribution de rapidité initiale. Les courbes rouges donnent l'allure de la distribution de rapidité aux temps longs. Les courbes violettes correspondent aux distributions de rapidité à des temps intermédiaires. a) La distribution de rapidité initiale est une distribution de Fermi-Dirac donnée par $\rho_0(k) = (1 + \exp(-\cos(k)/T))^{-1}$ avec $T=0.1$ . Les pointillés verts représentent un fit numérique réalisé avec une distribution de Boltzmann $a_1 \exp\{a_2 \cos(k)\}$ où le paramètre $a_2$ est ici positif. b) La distribution de rapidité à l'instant initial est une distribution oscillante $(1 - \cos(k))/2$ dont le premier mode de Fourier est différent de zéro. Les pointillés verts sont ici aussi le résultat d'un fit numérique avec une distribution de Boltzmann $a_1 \exp\{a_2 \cos(k)\}$ , mais le paramètre $a_2$ est cette fois négatif. c) La distribution de rapidité initiale est là aussi une distribution oscillante $(1 - \cos(2k))/2$ , mais son premier mode de Fourier est nul. . . . .	74
7.7	Effets des pertes à trois corps sur différentes distributions de rapidité. A l'instant initial les distributions de rapidité sont données par une distribution de Fermi-Dirac $\rho_0(k) = (1 + \exp\{-\cos(k)/T\})^{-1}$ où $T$ est la température. Les courbes colorées sont issues de la résolution numérique de l'équation d'évolution de la distribution de rapidité avec la méthode de Runge-Kutta. . . . .	75

---

7.8	<p>Evolution temporelle de la densité moyenne de particules sous l'effet des pertes à trois corps pour différentes distributions de rapidité. Les courbes pleines (de bleu à rouge) représentent le ratio <math>n(t)/n(0)</math> pour des distributions initiales thermiques tandis que les courbes colorées en jaune, vert clair et verte foncé sont obtenues avec des distributions non thermiques ayant respectivement un premier mode de Fourier non nul (jaune) et pas de premier mode de Fourier (vert). Les pointillés gris représentent le comportement asymptotique de la courbe verte claire et les pointillés oranges indiquent le comportement aux temps longs du ratio <math>n(t)/n(0)</math> pour des distributions initiales avec un premier mode de Fourier non nul. Le comportement asymptotique de la courbe rouge, correspondant à une distribution initiale plate, est en <math>\sim 1/\sqrt{t}</math> comme attendu d'après le résultat (7.64).</p>	77
7.9	<p>Comportement aux temps longs de différentes distributions de rapidité normalisées par la densité correspondante sous l'effet des pertes à trois corps. Les courbes bleues représentent le rapport <math>\rho(k, 0)/n(0)</math>, soit la distribution de rapidité initiale. Les courbes rouges donnent l'allure de la distribution de rapidité aux temps longs. a) Initialement la distribution de rapidité est donnée par une distribution de Fermi-Dirac <math>\rho_0(k) = (1 + \exp(-\cos(k)/T))^{-1}</math> avec <math>T=0.1</math>. b) A l'instant initial la distribution de rapidité est donnée par <math>(1 - \cos(k))/2</math>, dont le premier mode de Fourier est non nul. c) La distribution de rapidité initiale s'écrit ici comme <math>(1 - \cos(2k))/2</math> et son premier mode de Fourier est nul.</p>	78
7.10	<p>Schéma récapitulant la procédure numérique pour construire la distribution de rapidité dépendante du temps sous l'effet des pertes atomiques.</p>	81
7.11	<p>Evolution temporelle de la distribution de rapidité dépendante du temps sous l'effet des pertes à un corps (<math>K=1</math>), deux corps (<math>K=2</math>) et trois corps (<math>K=3</math>). La distribution initiale est donnée par (7.69) avec <math>\omega = 5\Gamma</math>, <math>\mu=0</math> et <math>T=0.1</math>. Le taux de pertes est <math>\Gamma=0.1</math> et la période de révolution dans le puits de potentiel <math>\tau = 2\pi/\omega</math>. L'espace des phases est discrétisé avec une grille régulière de 300 points par 300 points et le pas de temps est <math>\Delta t = 0.25</math>. Les profils de densité <math>n(x, t)</math> sont obtenus en intégrant sur <math>k</math> la distribution de rapidité dépendante de la position. Chaque profil de densité est normalisé par la densité initiale au centre du piège <math>n(0, 0) = n_0 = 1/2</math>.</p>	82
7.12	<p>Comparatif de la structure en spirale apparaissant dans la distribution <math>f(x, k)</math> sous l'effet des pertes à deux corps. A gauche nous considérons la distribution dans l'espace des phases avec <math>\omega = 5\Gamma</math> et à droite avec <math>\omega = 20\Gamma</math>. La comparaison est effectuée avec des distributions ayant perdu 40% d'atomes.</p>	83

---

7.13	<p>a) Évolution du nombre de particule <math>N(t)</math> sous l'effet des pertes à deux corps. Les courbes pleines représentent l'allure du nombre de particule <math>N(t)</math> normalisé par le nombre de particule à l'instant initial <math>N(0)</math> pour trois fréquences de piégeage : <math>\omega = 5\Gamma</math> (bleu clair), <math>\omega = 10\Gamma</math> (bleu) et <math>\omega = 20\Gamma</math> (bleu foncé). La droite en pointillés rouges est le comportement aux temps longs du rapport <math>N(t)/N(0)</math>. b) Évolution du nombre de particule <math>N(t)</math> sous l'effet des pertes à trois corps. Les courbes pleines représentent l'allure du nombre de particule <math>N(t)</math> normalisé par le nombre de particule à l'instant initial <math>N(0)</math> pour trois fréquences de piégeage : <math>\omega = 5\Gamma</math> (bleu clair), <math>\omega = 10\Gamma</math> (bleu) et <math>\omega = 20\Gamma</math> (bleu foncé). La droite en pointillés rouges est la loi de puissance attendue pour une théorie de champ moyen dans le cas homogène. Les pointillés noirs montrent le comportement observé du rapport <math>N(t)/N(0)</math>.          Pour a) et b) les potentiels chimiques <math>\mu</math> sont choisis de telle manière à fixer la densité de particule initiale à <math>1/2</math>.</p>	85
C.1	<p>Allure du premier mode de Fourier de la distribution de rapidité initiale en fonction de la température <math>T</math>. La courbe bleue est obtenue numériquement en considérant des distributions thermiques de diverses températures. Les courbes en pointillés verts et oranges correspondent respectivement aux résultats analytiques pour le régime de faibles et hautes températures.</p>	98

# Abstract

During this thesis, we studied the Lieb-Liniger model to describe on the one hand, the effects of a confinement potential on the density of the Bose gas and on the other hand, the effects of atomic losses at  $K$  body on trapped gas dynamics. To study one-dimensional Bose gas subjected to a trapping potential, we have proposed another interpretation of the local density approximation (LDA), which is widely used to reproduce the density profiles obtained experimentally. By considering the local gas density as a functional of the confining potential and by admitting its development in potential gradient, we identified the zero order to the standard LDA and the higher order terms to subdominant corrections. We have shown that the term of order 1 is identically null, analytically calculated the corrections of order 2,  $B$  and  $C$  in the limits of strong and weak interaction and we have also determined numerically the term  $B$  for an arbitrary force of interaction by summation of the form factors. However, this summation does not allow the term  $C$  to be calculated. Our LDA corrected with the  $B$  term has been compared to density profiles obtained by DMRG simulations and shows a much higher accuracy than the standard LDA.

To study the atomic losses, we considered a lattice homogeneous Tonks-Girardeau gas subjected to adiabatic losses. The dynamics of the system have been described using Lindblad's equation and assuming that the system has time to relax to a local steady state between two loss processes. We managed to explicitly compute the loss functional, containing the applied loss information, for the general case of  $K$  body losses. We were able to deduce the effect of atomic losses on the speed distribution (or occupation number) of the system and in particular for the cases  $K = 1$  and  $K = 2$  we respectively highlighted the absence and presence of loss-induced thermalization. We have shown these results analytically and numerically. To go further, we extended our model to the inhomogeneous case and added a harmonic potential. By adopting a hydrodynamic approach, we have established the equation governing the dynamics of the inhomogeneous system subjected to  $K$  body losses. We produced the phase portraits of the system for  $K = 1, 2, 3$  and showed that the long-time behavior of the mean particle density was identical to the behavior observed for a homogeneous system described by a mean-field approach.

**Keywords:** quantum integrable systems, cold atoms, hydrodynamics, out-of-equilibrium systems, strongly correlated systems.



# Résumé

Au cours de cette thèse, nous avons étudié le modèle de Lieb-Liniger pour décrire d'une part, les effets d'un potentiel de confinement sur la densité du gaz de Bose et d'autre part, les effets des pertes atomiques à  $K$  corps sur la dynamique du gaz piégé. Pour étudier le gaz de Bose unidimensionnel soumis à un potentiel de piégeage, nous avons proposé une autre interprétation de l'approximation de densité locale (LDA), qui est largement utilisée pour reproduire les profils de densité obtenus expérimentalement. En considérant la densité locale du gaz comme une fonctionnelle du potentiel de confinement et en admettant son développement en gradient du potentiel, nous avons identifié l'ordre zéro à la LDA standard et les termes d'ordre supérieur à des corrections sous dominantes. Nous avons montré que le terme d'ordre 1 est identiquement nul, calculé analytiquement les corrections d'ordre 2,  $B$  et  $C$  dans les limites de forte et faible interaction et nous avons également déterminé numériquement le terme  $B$  pour une force d'interaction arbitraire par sommation des facteurs de formes. Cette sommation ne permet, en revanche, pas de calculer le terme  $C$ . Notre LDA corrigée avec le terme  $B$  a été comparée à des profils de densité obtenus par simulation DMRG et montre une précision bien supérieure à la LDA standard.

Pour étudier les pertes atomiques, nous avons considéré un gaz de Tonks-Girardeau homogène sur réseau soumis à des pertes adiabatiques. La dynamique du système a été décrite en utilisant l'équation de Lindblad et en admettant que le système a le temps de relaxer vers un état stationnaire local entre deux processus de pertes. Nous sommes parvenus à calculer explicitement la fonctionnelle de pertes, contenant l'information sur la perte appliquée, pour le cas général des pertes à  $K$  corps. Nous avons pu en déduire l'effet des pertes atomiques sur la distribution de rapidité (ou nombre d'occupation) du système et en particulier pour les cas  $K = 1$  et  $K = 2$  nous avons mis en évidence respectivement l'absence et la présence de thermalisation induite par les pertes. Nous avons montré ces résultats analytiquement et numériquement. Pour aller plus loin, nous avons étendu notre modèle au cas inhomogène et ajouté un potentiel harmonique. En adoptant une approche hydrodynamique nous avons établi l'équation gouvernant la dynamique du système inhomogène soumis aux pertes à  $K$  corps. Nous avons produit les portraits de phase du système pour  $K = 1, 2, 3$  et montré que le comportement aux temps longs de la densité moyenne de particules était identique au comportement observé pour un système homogène décrit par une approche champ moyen.

**Mots clefs** : systèmes quantiques intégrables, atomes froids, hydrodynamique, systèmes hors équilibre, systèmes fortement corrélés.

# Articles de références

Les résultats présentés dans ce manuscrit de thèse sont basés sur les articles suivants :

1. F. Riggio, Y. Brun, D. Karevski, A. Faribault, and J. Dubail, "Gradient corrections to the local density approximation in the one-dimensional Bose gas", *Physical Review A*, vol. **106**, Nov. (2022). doi :[10.1103/PhysRevA.106053309](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.106053309)
2. F. Riggio, L. Rosso, D. Karevski, and J. Dubail, "Effects of atom losses on a one-dimensional lattice gas of hardcore bosons", Jul. (2023). [arXiv:2307.02298](https://arxiv.org/abs/2307.02298) (pre-print)

# Première partie

## Introduction à la physique des atomes froids

# Chapitre 1

## Contexte historique de la physique à basse température

### 1.1 Emergence de la physique à basse température

Au début du XX<sup>e</sup> siècle, le domaine de la physique connaît un véritable bouleversement. Les modèles ondulatoires sensés décrire le rayonnement des corps noirs sont en échecs et conduisent à la célèbre catastrophe ultra-violette. Une théorie nouvelle se met alors à émerger, c'est la théorie des quantas. Cette théorie est défendue par des physiciens tels que Max Planck et sera reprise par Einstein en 1905 dans son article sur l'effet photo-électrique. Tentant de palier à la théorie de Rayleigh-Jeans, qui prédisait que l'énergie émise par le rayonnement d'un corps noir était infinie, Planck fait l'hypothèse que l'énergie est quantifiée. Son approche réussit à corriger le modèle classique et pose les bases de ce que l'on appelle aujourd'hui la mécanique quantique. Ainsi la nature discrète de la matière apparaît comme l'approche la plus pertinente pour étudier la physique aux petites échelles. Formalisée proprement par le papier de Einstein de 1905, la théorie des quanta permet à une nouvelle génération de physiciens de combler les vides laissés par la physique classique. Comme exemple on peut citer le modèle de l'atome de Bohr pour l'atome d'hydrogène proposé par Nils Bohr et expliquant que l'électron circule autour du proton sur des orbites circulaires quantifiées. L'électron peut alors changer d'orbite à condition que l'atome absorbe un quantum de lumière appelé photon ayant une énergie  $\hbar\omega$  égale à la différence d'énergie entre l'orbite de départ et l'orbite d'arrivée :  $\hbar\omega = E_2 - E_1$ . Ce modèle, bien que relativement simple, fournit des prédictions en parfait accord avec les expériences menées et montre la stabilité de la matière contrairement à l'approche de Maxwell. Par la suite, le début du XX<sup>e</sup> siècle est dédié à l'élaboration et à la formalisation des concepts fondamentaux de la mécanique quantiques comme la notion de spin mise en évidence expérimentalement par Stern et Gerlach en 1922 et formalisée par Pauli et Heisenberg. On a souvent l'habitude de résumer la première moitié de ce siècle par les nombreuses et novatrices théories proposées, mais on oublie assez vite que dans le même temps, les progrès technologiques, notamment permis par les révolutions industrielles, se sont accélérés. En effet, à la même période, une série d'expériences met en évidence d'autres phénomènes physiques qui ne peuvent être expliqués par les modèles classiques. En effet, entre 1909 et 1911, Kamerlingh Onnes [9] pose les bases de la physique des atomes froids en étudiant la résistivité des métaux pour des températures proches du zéro absolu ( $T = 0K$ ). Comme il était admis que le courant électrique correspondait à un flux d'électrons et que la résistance d'un matériau dépendait des collisions entre les ions et les

électrons, on ne savait pas si, pour des températures quasi nulles, les électrons resteraient immobiles, rendant le métal complètement isolant ou si le nombre de collisions diminuerait jusqu'à avoir une résistivité nulle. C'est dans ce cadre que Kamerlingh Onnes découvre la supraconductivité du mercure, c'est-à-dire l'absence de résistivité à basse température. Toujours étudiés de nos jours, ce phénomène a fait prendre conscience aux scientifiques que l'étude de la matière à des températures proches du Kelvin (K) pouvait faire émerger des comportements particuliers, des comportements quantiques. Kamerlingh Onnes fut aussi le premier à liquéfier l'hélium à l'aide des premières pompes à vides. Les expériences à basse température, bien qu'encore rudimentaires, vont se multiplier pendant que la mécanique quantique se formalise petit à petit.

## 1.2 Explication des comportements quantiques observés

En généralisant les travaux de Bose [10] sur les photons à toute particule massique de spin entier, Einstein prédit en 1925 un nouvel état de la matière, le condensat de Bose-Einstein (BEC).

Comme toute transition de phase, la condensation de Bose-Einstein se manifeste lorsque la température est inférieure à une température critique  $T_c$  (de l'ordre de la centaine de nK), les fluctuations thermiques pouvant être entièrement négligées. Pour de telles températures, les bosons se rassemblent dans le niveau d'énergie à une particule le plus bas, si bien que pour un nombre macroscopique de bosons se trouvant dans le fondamental, le recouvrement de leurs fonctions d'onde devient important. L'entièreté du gaz de bosons est alors décrit par une unique fonction d'onde macroscopique et on parle de BEC. Cet état de la matière a été prédit en considérant un gaz de bosons tridimensionnel sans interactions, ce qui ajoute une autre contrainte quand à la réalisation expérimentale d'un BEC. En effet, à cette époque il était impossible d'atteindre des températures aussi basses et les conséquences des interactions entre les particules sur la création du BEC étaient méconnues. Toutefois, la découverte de la superfluidité de l'hélium-4 en 1937 par Kapitsa [11] et Allen et Misener [12] a grandement décuplé l'intérêt pour la physique des atomes froids. Lorsque la température n'est plus que de l'ordre de quelques Kelvin, l'hélium-4 entre en phase superfluide qui se caractérise par l'absence de viscosité. Ce phénomène a longtemps divisé quant à son rapport avec la condensation de Bose-Einstein. Comme mentionné plus haut, la condensation de Bose-Einstein a été prédite pour des bosons non interagissant, ce qui entre en contradiction avec la nature de l'hélium-4 superfluide où les bosons interagissent fortement. Pour London [13] et Tisza [14] à basse température, l'hélium-4 est composé d'un BEC et d'un gaz de bosons non condensé alors que pour Landau [15] et Kapitsa il s'agit plutôt d'un mélange de deux gaz parfaits de quasiparticules. Bogoliubov [16] montre en 1947 qu'il existe bien un BEC pour le gaz de Bose faiblement interagissant et que les excitations de basse énergie sont des phonons, ceci n'explique pas pour autant la superfluidité de l'hélium. Par la suite, on a découvert que l'appariement de fermions conduisait à un comportement bosonique de la matière, ce qui est à l'origine de la superfluidité de l'hélium-3 et de la supraconductivité. Pour cette dernière, il faudra attendre presque 50 ans avant que Bardeen, Cooper et Schrieffer ne démontrent que la supraconductivité provient de la formation d'un BEC composé de paires d'électrons, c'est la théorie BCS [17]. Que ce soit pour la superfluidité ou la supraconductivité, deux phénomènes de nature quantique encore largement étudiés de nos jours, c'est bien la capacité

que possèdent les bosons à se condenser à basse température qui en est à l'origine.

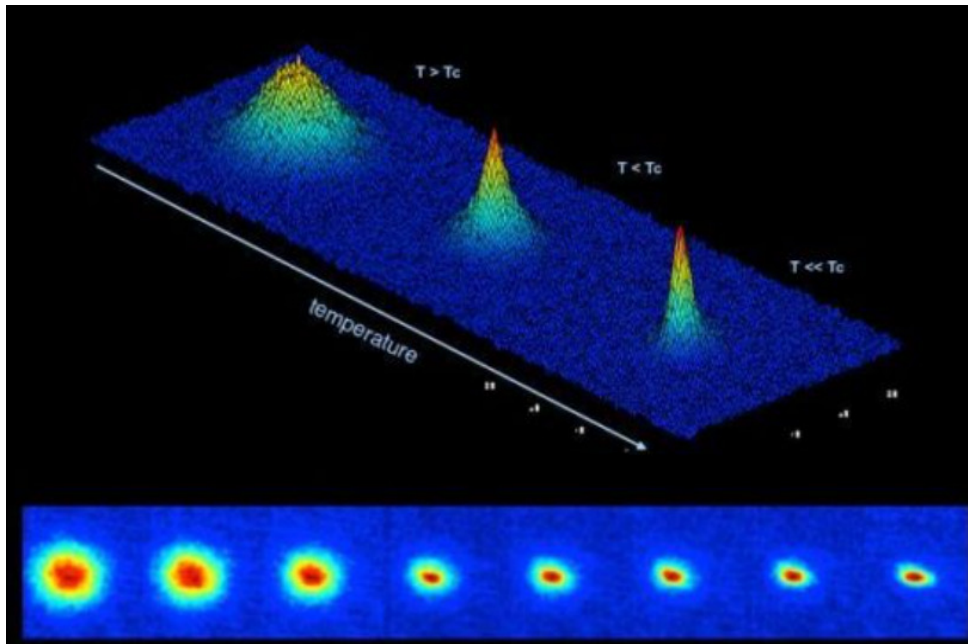


FIGURE 1.1 – Cette image montre, en fausses couleurs, la formation d'un condensat de Bose-Einstein obtenu par le Cold Atom Laboratory prototype du NASA Jet Propulsion Laboratory. Le condensat apparaît lorsque la température passe en dessous d'une température critique  $T_c$  et est caractérisé par une densité très piquée (visible en 2D et 3D sur l'image). Cette image est issue de la banque d'images de la NASA (<https://images.nasa.gov/>) et est dans le domaine public ([Creative Commons site](#)).

### 1.3 Physique de la matière ultra froide

Même si la théorie de la condensation de Bose-Einstein semble jouer un rôle majeur dans l'explication des phénomènes physiques nouveaux apparaissant à basse température, il faudra attendre la fin des années 1990 pour voir émerger des réalisations expérimentales de condensation de Bose-Einstein [18, 19]. Les techniques et méthodes expérimentales s'étant raffinées au cours du temps, nous sommes désormais en mesure de créer des systèmes tridimensionnels dans lesquels un gaz de bosons dilué est refroidi à des températures de l'ordre de la dizaine de nK, on parle de physique de l'atome ultra froid. Pour atteindre des températures aussi faibles le gaz d'atomes est confiné dans un piège optique ou magnétique. On utilise généralement deux méthodes de refroidissement, le refroidissement par évaporation [20, 21, 22] et le refroidissement Doppler [23, 24]. La première méthode consiste à piéger un gaz d'atomes de forte densité à l'aide de champs magnétiques et de lasers. Les paramètres du piège étant contrôlables expérimentalement, nous pouvons imaginer créer un puits de potentiel dans lequel seuls les atomes avec une énergie cinétique inférieure à la hauteur du puits sont conservés. Les atomes avec une plus grande énergie cinétique sont évacués. Le gaz n'est alors composé plus que d'atomes "moins rapides" et la température moyenne diminue. En répétant l'opération, on peut drastiquement réduire la température du gaz. Cette technique permet de refroidir le gaz jusqu'à des températures inférieures à la dizaine de nK, mais dans l'opération une grande partie du gaz est perdue.

La deuxième méthode est elle aussi conceptuellement simple à comprendre. On considère un système à une dimension dans lequel deux sources laser se font face et produisent des photons de même fréquence  $\omega$ . Entre les deux sources, un atome se déplace à une vitesse  $v$  et on suppose qu'au-dessus du fondamental d'énergie  $E_0$  il n'existe qu'un seul état excité d'énergie  $E_1$ . On note la quantité d'énergie nécessaire pour effectuer la transition  $\hbar\omega_0$  avec  $\omega < \omega_0$ . Dans le référentiel de l'atome, ce dernier est bombardé de photons d'énergie  $\hbar\omega - \hbar\vec{k} \cdot \vec{v}$ , si bien que lorsque l'atome se déplace dans le sens opposé aux photons incidents, l'absorption d'un photon conduit à un ralentissement de l'atome du fait du recul. Et puisqu'en moyenne l'émission spontanée ne modifie pas l'impulsion de l'atome, on arrive progressivement à refroidir la matière. Les expériences de refroidissements de gaz quantique ont connu un fort engouement depuis lors et les physiciens sont parvenus à mettre en oeuvre des systèmes à trois, puis à deux dimensions. L'élaboration de systèmes unidimensionnels ne date que d'une quinzaine d'années.

## 1.4 Particularité de la physique à une dimension

Le fait de disposer de systèmes expérimentaux à une dimension permet aux chercheurs de confronter des modèles théoriques étudiés depuis plusieurs décennies aux phénomènes observés directement lors des expériences. Après la formalisation de la mécanique quantique, l'étude des systèmes à  $N$  particules en interaction les unes avec les autres était indispensable pour comprendre les mécanismes à l'origine des propriétés de la matière, en particulier à basse température. Les physiciens imaginent alors des modèles unidimensionnels suffisamment simples pour être traités analytiquement et suffisamment sophistiqués pour capturer le phénomène physique souhaité. Ces modèles vont servir de jouets aux scientifiques et leur permettre de développer le formalisme et les concepts adéquates pour décrire au mieux le comportement de la matière. A titre d'exemple, en 1928 Heisenberg publie son modèle de chaîne de spins dans le but d'expliquer l'aimantation spontanée des matériaux ferromagnétiques grâce à l'interaction d'échange qui tend à aligner les spins adjacents. Malgré la simplicité apparente du modèle, ce n'est qu'en 1931 que Hans Bethe parvient à déterminer les états propres et les valeurs propres du modèle de la chaîne de spins antiferromagnétique. La méthode utilisée par Bethe [25], connue de nos jours comme "l'ansatz de Bethe", met en évidence une spécificité des modèles à une dimension. Bethe comprend qu'il est possible de considérer les interactions entre plusieurs particules se déplaçant à une dimension comme une succession d'interaction à deux particules. Il écrit la fonction d'onde du système comme une somme d'ondes planes dont les collisions à deux corps ne modifient que la phase. Cette méthode peut être appliquée à d'autres modèles unidimensionnels et est utilisée en 1963 par Lieb et Liniger pour résoudre l'équation de Schrödinger non-linéaire unidimensionnelle. Ce modèle porte aujourd'hui le nom de modèle de Lieb-Liniger et constitue l'outil de base pour l'étude théorique des gaz quantiques froids à une dimension. De plus, depuis les travaux de Haldane [26, 27] dans les années 80 sur les liquides de Luttinger, il est admis qu'une grande variété de modèles quantiques unidimensionnels appartiennent à la même classe d'universalité et que le bas du spectre en énergie de ces modèles s'explique par la théorie des liquides de Luttinger. Cette dernière ayant été testée expérimentalement dans des nanotubes de carbone, la récente mise en oeuvre d'expériences d'atomes ultra froids offre de nouvelles perspectives quant à l'observation des propriétés spécifiques des systèmes à une dimension.

## 1.5 Nouveautés et sujets ouverts

Dans la communauté des atomes froids, les dispositifs expérimentaux utilisés constituent de formidables outils pour décrire la dynamique hors équilibre des gaz quantiques. L'une des expériences les plus célèbres reste celle du pendule de Newton [28], dans laquelle on étudie la dynamique d'un gaz unidimensionnel initialement confiné dans un double puits de potentiel. On y réalise une procédure de quench, c'est-à-dire que l'on va modifier brutalement la forme du potentiel et suivre l'évolution du système en présence d'un autre potentiel, ici un potentiel harmonique. On observe alors un comportement analogue à celui d'un pendule de Newton classique, tout se passe comme si les deux parties du gaz entraient en collision et s'échangeaient leurs impulsions. Cette absence de relaxation au sens de Gibbs a été expliquée en 2016 par deux équipes indépendantes posant ainsi les bases d'une nouvelle théorie, l'hydrodynamique généralisée (GHD) [29, 30]. Cette théorie repose sur la notion d'intégrabilité [31, 32] que l'on retrouve dans différents modèles théoriques tels que la chaîne de spins  $XXZ$ , le modèle de Lieb-Liniger [1, 33] ou encore le modèle de Hubbard. Quand un système admet un grand nombre de grandeurs conservées, il est intégrable et est spécifié par un ensemble de Gibbs dit généralisé dans le sens où les intégrales du mouvement ne se limitent pas au nombre de particules et à l'énergie. En se plaçant à une échelle mésoscopique, on peut considérer notre système de particules comme un milieu continu, un fluide. Si on suppose que notre système est constitué d'un grand nombre de cellules fluides, la portion de fluide contenue dans une de ces cellules relaxe vers un ensemble de Gibbs généralisé. Au sein de cette cellule fluide, on peut alors définir des charges locales, des grandeurs physiques locales à partir de densités de charges locales qui obéissent à des équations hydrodynamiques. L'accord entre cette théorie et les expériences d'atomes ultra froids est quasiment parfait. Le concept d'ensemble de Gibbs généralisé sert également de point de départ à la description théorique de phénomènes issus du couplage entre le système et son environnement, comme le processus de pertes atomiques intervenant spontanément lors des expériences. L'intérêt d'étudier les phénomènes de pertes atomiques est double, comme les mécanismes de pertes sont inévitables durant l'expérience, il s'agit d'abord de mieux appréhender l'effet de ce processus sur la dynamique du gaz. Pour les systèmes intégrables, il s'agit aussi de comprendre si les pertes atomiques peuvent induire la thermalisation du système en détruisant son intégrabilité. Cette question demeure toujours ouverte de nos jours et fait de l'étude des pertes atomiques [34, 35, 36, 37, 38, 39, 40] l'un des sujets les plus brûlant de la physique des atomes froids. Outre les processus de pertes, mentionnons qu'il est également possible [41] de provoquer la thermalisation du système en ajoutant un terme de diffusion dans les équations de la GHD. En ce sens, l'objectif principal de cette thèse est de proposer un modèle théorique permettant de décrire les effets des pertes atomiques sur un système intégrable et de mettre en évidence la présence ou l'absence de thermalisation à des temps longs.

Pour présenter au mieux les résultats obtenus durant cette thèse, nous décomposons ce manuscrit en deux grandes parties. La première partie introduit les concepts fondamentaux nécessaires à la bonne compréhension du travail réalisé. Dans cette partie, le chapitre 1 est consacré à un rappel historique du développement de la physique à basse température. Le chapitre 2 présente le modèle intégrable le plus utilisé pour décrire les expériences d'atomes froids, le modèle de Lieb-Liniger. Dans le chapitre 3, nous introduisons l'approximation de densité locale et discutons son domaine de validité ainsi que son applicabilité aux systèmes inhomogènes réalisés expérimentalement, notamment pour la description des profils de densité. Le chapitre 4 propose une brève démonstration de



l'obtention de l'équation de Lindblad, couramment utilisée pour modéliser la dynamique d'un système couplé à son environnement. Pour clôturer cette partie, nous revenons, dans le chapitre 5, sur la dynamique des systèmes inhomogènes dans l'espace des phases. Nous y définissons la distribution de Wigner et montrons numériquement comment cette dernière peut être utilisée pour décrire la dynamique d'un système de fermions libres dans un potentiel de piégeage. Nous y faisons également un parallèle avec la théorie de la GHD. La seconde partie regroupe les résultats engrangés durant cette thèse. Le chapitre 6 présente la méthode utilisée pour calculer des corrections à l'approximation de densité locale et ainsi améliorer sa précision. Le but est d'obtenir une meilleure description des profils de densité. Les profils obtenus avec notre méthode sont comparés avec des profils issus de simulations DMRG. Enfin, le chapitre 7 traite des pertes atomiques dans un système intégrable. Nous y développons le formalisme permettant de mettre en évidence les effets des pertes sur la dynamique du gaz. La question de la thermalisation induite par les pertes est étudiée en détail dans le cas d'un système homogène et inhomogène.

# Chapitre 2

## Le modèle de Lieb-Liniger

Le modèle de Lieb-Liniger (LL) [1, 33] décrit une assemblée de  $N$  bosons interagissant par le biais d'une interaction de contact et se déplaçant sur un cercle de circonférence  $L$ . L'hamiltonien de Lieb-Liniger  $H_{LL}$  s'écrit

$$H_{LL} = \int_0^L dx \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi^\dagger(x) \partial_x^2 \Psi(x) + \frac{g}{2} \Psi^\dagger(x) \Psi^2(x) - \mu \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \right), \quad (2.1)$$

où les champs bosoniques  $\Psi(x)$  et  $\Psi^\dagger(x)$  détruisent et créent respectivement une particule au point  $x$  et satisfont la relation de commutation suivante :  $[\Psi(x), \Psi^\dagger(y)] = \delta(x - y)$ . La constante  $g > 0$  mesure la force de répulsion entre les bosons et  $\mu$  est le potentiel chimique du système. On peut définir une grandeur adimensionnée permettant d'identifier le régime d'interaction dans lequel se trouve le système, c'est le paramètre de Lieb  $\gamma = g/\rho$ , où  $\rho = N/L$  est la densité du gaz de bosons.

Pour de faibles valeurs de  $\gamma$ , les interactions entre particules sont faibles et le système partage alors des caractéristiques similaires à celles d'un BEC apparaissant à trois dimensions.

Pour les hautes valeurs de  $\gamma$ , le système se comporte comme un gaz de fermions libres sans spin. Toutefois, dans ce régime le gaz de bosons possède des caractéristiques différentes de celles d'un authentique gaz de fermions libres. Par exemple, la distribution d'impulsions du système bosonique présente des queues [42, 43] décroissantes en  $1/p^4$ , où  $p$  est l'impulsion. Expérimentalement, les premières observations d'un gaz de bosons à une dimension ayant un comportement fermionique ont eu lieu il y a une vingtaine d'années [44, 45].

Dans la suite de ce chapitre, nous nous limitons à l'étude des propriétés du gaz de Bose unidimensionnel à température nulle  $T = 0$ .

### 2.1 L'ansatz de Bethe

Le modèle LL est intégrable, il admet un grand nombre de grandeurs conservées. De plus, il est exactement soluble en utilisant l'ansatz de Bethe. L'ansatz de Bethe est une méthode de résolution se basant sur le fait que les processus de collisions à  $N$  corps peuvent, pour un système unidimensionnel, se factoriser en processus de collisions à 2 corps. Lorsque deux bosons entrent en collision, la conservation de l'énergie et de l'impulsion impliquent que les deux particules échangent leurs impulsions. La généralisation à  $N$  corps se fait en écrivant la fonction d'onde du système comme une superposition d'ondes

planes, les collisions ne modifiant la fonction d'onde que d'une phase.

Pour construire cette fonction d'onde, nous reprenons la démarche présentée dans le premier chapitre de [46]. Tout d'abord, il est à noter que le hamiltonien  $H_{LL}$  est invariant par translation et commute avec l'opérateur impulsion  $P = i\hbar \int_0^L dx (\partial_x \Psi^\dagger(x)) \Psi(x)$ . De plus, il commute également avec l'opérateur nombre de particules  $Q = \int_0^L dx \Psi^\dagger(x) \Psi(x)$ . Ces trois opérateurs partagent donc une base d'états propres en commun. Écrivons les états propres communs à ces trois opérateurs comme suit

$$|\Phi_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int dx_1 \dots dx_N \chi_N(x_1, \dots, x_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N) \Psi^\dagger(x_1) \dots \Psi^\dagger(x_N) |0\rangle, \quad (2.2)$$

où la fonction d'onde  $\chi_N$  est fonction propre de l'opérateur impulsion en première quantification  $\mathbf{p}_N = -i\hbar \sum_{j=1}^N \partial_{x_j}$  et du hamiltonien  $\mathbf{h}_N = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^N \partial_{x_j}^2 + g \sum_{j>i} \delta(x_j - x_i)$ . On peut prouver cette assertion en appliquant directement l'opérateur  $P$  ou l'opérateur  $H_{LL}$  sur l'état  $|\Phi_N\rangle$ .

Avant d'aller plus loin, voyons quelques propriétés de la fonction d'onde  $\chi_N$ . Pour ce faire, nous considérons l'équation aux valeurs propres pour  $N = 2$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \chi_N + g \delta(x_2 - x_1) \chi_N = E_N \chi_N. \quad (2.3)$$

Pour simplifier cette équation nous introduisons les coordonnées réduites  $x$  et du centre de masse  $X$  respectivement données par  $x = x_2 - x_1$  et  $X = (x_1 + x_2)/2$ . On peut alors en déduire la relation  $\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 = 2\partial_x^2 + \partial_X^2/2$  et en notant  $\chi_N(x, X) = \phi_1(x)\phi_2(X)$ , l'équation (2.3) peut alors s'écrire

$$-\frac{\hbar^2}{m\phi_1(x)} \frac{\partial^2 \phi_1(x)}{\partial x^2} + g \delta(x) - E_N = \frac{\hbar^2}{4m\phi_2(X)} \frac{\partial^2 \phi_2(X)}{\partial X^2}. \quad (2.4)$$

Pour que cette égalité soit vérifiée les deux côtés de l'équation doivent être égaux à la même constante. Le membre de droite conduit à l'équation du mouvement du centre de masse tandis que le membre de gauche montre la discontinuité de la dérivée de la fonction d'onde  $\phi_1(x)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Big|_{x+\epsilon} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Big|_{x-\epsilon} \right) + g \phi_1(0) = 0, \quad (2.5)$$

obtenue après intégration sur  $x$  entre  $x + \epsilon$  et  $x - \epsilon$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ . Le fait de traiter explicitement le cas à deux particules permet de montrer que la fonction d'onde  $\chi_N$  est continue mais présente une discontinuité dans sa dérivée lorsque  $x_j \rightarrow x_{j+1}$ . De plus, comme elle décrit un système de  $N$  bosons, la fonction d'onde  $\chi_N$  est invariante par permutations des positions  $x_j$ . Ainsi, on peut déterminer sa forme en se restreignant à la région  $R$  dans laquelle les positions sont ordonnées de la manière suivante  $R : x_1 < x_2 < \dots < x_N$ . Dans cette région, le hamiltonien  $\mathbf{h}_N$  ne contient pas de terme d'interaction car les positions des bosons sont fixes et ne coïncident pas. Finalement dans cette région, la fonction d'onde  $\chi_N$  doit satisfaire les deux relations suivantes

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_j \frac{\partial^2 \chi_N}{\partial x_j^2} = E_N \chi_N \quad (2.6)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \chi_N - c \chi_N = 0 \quad \text{pour } x_j \rightarrow x_{j+1}. \quad (2.7)$$

L'ansatz de Bethe consiste à écrire la fonction d'onde  $\chi_N$  comme une superposition d'ondes planes

$$\chi_N = A \sum_{\mathcal{P}} f(\mathcal{P}) e^{i \sum_{j=1}^N \lambda_{\mathcal{P}_j} x_j}, \quad (2.8)$$

où  $A$  est une constante,  $\{\lambda\}$  est une suite de  $N$  nombres ordonnés, la somme prend en compte toutes les permutations possibles de la suite  $\{\lambda\}$  et  $f(\mathcal{P})$  est un coefficient qui dépend de la permutation considérée. Les nombres  $\lambda_j$  sont appelés rapidités et peuvent s'interpréter comme les impulsions des particules renormalisées par leurs interactions les unes avec les autres.

Pour déterminer ces coefficients nous utilisons la méthode employée par Lieb et Liniger [1] et ordonnons les nombres  $\lambda_j$  comme suit :  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ . A partir de cette configuration de base, on en construit une autre en permutant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et on note cette permutation  $P_{21}$ . La fonction d'onde s'écrit alors  $\chi_N = (\exp\{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\}) + f(P_{21}) \exp\{i(\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2)\} + \dots$ . En injectant cette dernière expression dans la deuxième équation du système (2.6) pour  $x_1 \rightarrow x_2$ , on obtient la relation

$$f(P_{21}) = - \left( \frac{g - i(\lambda_2 - \lambda_1)}{g + i(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) = -e^{-i\theta(\lambda_2 - \lambda_1)} f(P_{12}), \quad (2.9)$$

où  $f(P_{12}) = 1$  et où nous avons introduit une quantité fondamentale, la phase de diffusion, que nous définissons ainsi :  $\theta(z) = 2 \arctan(z/c) = \ln((1 + iz/c)/(1 - iz/c))$ . L'équation ci-dessus montre que lorsque deux particules entrent en collision, la fonction d'onde du système à  $N$  particules gagne une phase  $\theta$ . La phase de diffusion donne l'information sur l'échange de rapidités se produisant lors d'une collision entre deux particules. Le résultat ci-dessus peut se généraliser à un système de  $N$  particules. En effet, comme le système est unidimensionnel, chacune des  $N!$  configurations de rapidités peut s'obtenir à partir de celle de base en faisant permuer successivement deux rapidités adjacentes. A titre d'exemple, dans la figure Fig. (2.1) nous donnons la règle [1] diagrammatique pour construire le coefficient  $f(P_{321})$  pour un système de trois particules. Le but du schéma 2.1 est de montrer qu'à chaque permutation ou collision, le système gagne un facteur  $-\exp\{-i\theta(\lambda_j - \lambda_k)\}$ , où  $\lambda_j$  et  $\lambda_k$  sont les rapidités permutées.

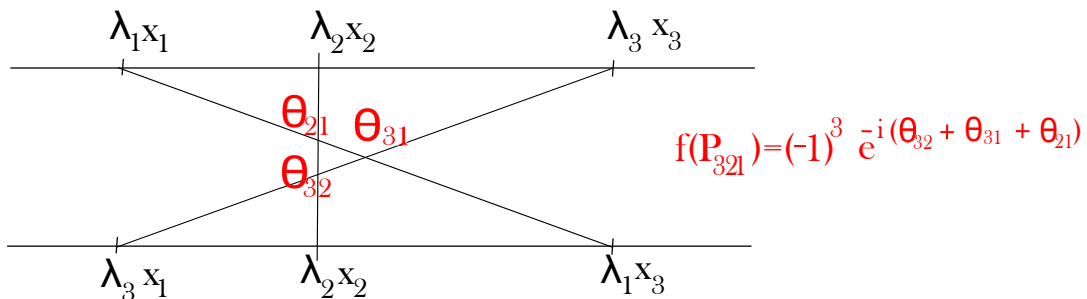


FIGURE 2.1 – Schéma montrant comment sont construits les coefficients  $f(P)$ . Ici on considère un système à  $N = 3$  particules vivant dans la région  $R : x_1 < x_2 < x_3$ . Pour obtenir le coefficient  $f(P_{321})$  correspondant au triplet de rapidité  $(\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1)$ , on écrit la configuration de base  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  au-dessus de la configuration  $(\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1)$ . On relie ensuite par une droite les rapidités identiques d'une configuration à l'autre et à chaque intersection on note la phase de diffusion  $\theta$ . Le coefficient  $f(P_{321})$  est alors écrit comme le produit  $f(P_{321}) = (-1)^3 \exp\{-i(\theta_{32} + \theta_{31} + \theta_{21})\}$ , où  $\theta_{jk} = \theta(\lambda_j - \lambda_k)$ .

Ainsi, dans la région  $R$  la fonction d'onde  $\chi_N$  est donnée par

$$\chi_N = A \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{[\mathcal{P}]} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^N \lambda_{\mathcal{P}_j} x_j - i \sum_{1 \leq k < n \leq N} \theta(\lambda_{\mathcal{P}_n} - \lambda_{\mathcal{P}_k}) \right\}. \quad (2.10)$$

Par symétrie, on peut étendre la définition de  $\chi_N$  à toutes régions  $R$  [46]

$$\chi_N = \frac{(-i)^{\frac{N(N-1)}{2}}}{\sqrt{N!}} \prod_{1 \leq k < j \leq N} \text{sgn}(x_j - x_k) \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{[\mathcal{P}]} e^{i \sum_j \lambda_{\mathcal{P}_j} x_j} e^{-\frac{i}{2} \sum_{1 \leq k < j \leq N} \text{sgn}(x_j - x_k) \theta(\lambda_{\mathcal{P}_j} - \lambda_{\mathcal{P}_k})}, \quad (2.11)$$

où nous avons spécifié la constante de normalisation  $A$  et introduit la fonction signe de  $z$ ,  $\text{sgn}(z)$ .

Imposons à présent des conditions de bords périodiques, ce qui revient à déplacer une particule avec une rapidité  $\lambda_i$  le long du cercle de circonférence  $L$ . Sur son passage cette particule entre en collision avec les autres particules fixes gagnant ainsi une phase dite de diffusion. Après avoir effectuée sa translation, la particule gagne également une phase dynamique  $e^{i\lambda_i L}$ . On arrive alors aux équations de Bethe :

$$\lambda_j + \frac{1}{L} \sum_k \theta(\lambda_j - \lambda_k) = \frac{2\pi}{L} I_j, \quad (2.12)$$

où les  $I_j$  sont les nombres de Bethe qui sont demi-entiers pour  $N$  pair et entiers pour  $N$  impair. Un nombre de Bethe est unique et est associé à une seule rapidité. Du fait de cette correspondance bi-univoque entre nombre de Bethe et rapidité, les équations de Bethe permettent d'obtenir un jeu de  $N$  rapidités  $\{\lambda_i\}$  caractérisant complètement un état à  $N$  particules.

Comme la fonction  $\theta(z)$  est antisymétrique la relation (2.12) conduit à exprimer l'impulsion d'un état à  $N$  particules par

$$P_N = \sum_j \lambda_j = \frac{2\pi}{L} \sum_j I_j. \quad (2.13)$$

La configuration de nombres de Bethe qui minimise l'énergie correspond à une mer de Dirac, soit  $\{I_j\} = j - \frac{N+1}{2}$  pour  $j = 1, \dots, N$ . L'état fondamental du modèle LL est donc obtenu en résolvant les équations de Bethe pour cette configuration de nombres de Bethe.

### 2.1.1 Excitations du modèle

On a vu que les états propres du modèle LL sont représentés par des séquences de rapidités auxquelles on associe des configurations de nombre de Bethe. En particulier, le fondamental est représenté par une séquence symétrique de nombre de Bethe compris entre  $-\frac{N-1}{2}$  et  $\frac{N-1}{2}$ . Les excitations du système sont construites à partir de l'état fondamental et se classent généralement en deux types, les excitations de type particule et les excitations de type trou. Dans ce qui suit nous supposons que la configuration de rapidités du fondamental à  $N$  particules est  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ .

Les excitations de type particule consistent à ajouter une particule au fondamental à  $N$

particules. Partant du fondamental à  $N + 1$  particules, on promeut la particule de rapidité maximum  $\lambda_{N+1}$  vers une rapidité  $\lambda_m$  telle que  $\lambda_{N+1} < \lambda_m$ .

Les excitations de type trou, en revanche consistent à retirer une particule du fondamental à  $N$  particules. On part cette fois-ci du fondamental à  $N - 1$  particules et on prélève une particule ayant une rapidité comprise entre  $\lambda_1$  et  $\lambda_{N-1}$  pour la promouvoir vers la rapidité  $\lambda_N$ .

Ces deux excitations changent le nombre de particules, mais on peut également créer des excitations à nombre de particules fixé. On appelle les excitations à  $N$  fixé des excitations de paires particule-trou et même si cela peut sembler contradictoire, ces excitations modélisent les fluctuations de densité. En effet, le fait de créer un trou dans la mer de Dirac et une particule avec une rapidité au dessus du niveau de Fermi, engendre un changement dans la distribution de rapidité. Cette modification est due aux corrélations entre les particules et on peut montrer qu'elle est de l'ordre de  $1/L$ .

Dans la deuxième partie de ce mémoire de thèse, on reviendra plus précisément sur ces excitations de paires.

## 2.1.2 Limite thermodynamique

La limite thermodynamique consiste à faire tendre le nombre de particules et la taille du système vers l'infini  $N, L \rightarrow \infty$  tout en gardant la densité  $\rho$  finie. Dans cette limite, l'écart entre deux rapidités consécutives tend vers zéro  $\lambda_{j+1} - \lambda_j \sim \mathcal{O}(1/L)$  tant et si bien qu'une configuration de rapidités constitue un intervalle délimité par une rapidité minimum  $\Lambda_{min}$  et une rapidité maximum  $\Lambda_{max}$ . Il est à noter que ces bornes dépendent explicitement du paramètre  $\gamma$ .

En ordonnant les nombres de Bethe par ordre croissant, on peut définir la fonction de comptage  $\phi(\lambda_j) = 2\pi I_j/L$  qui à une rapidité  $\lambda_j$  associe un nombre de Bethe  $I_j$ . Les équations de Bethe (2.12) peuvent alors s'écrire à l'aide de la fonction de comptage

$$\phi(\lambda_j) = \lambda_j + \frac{1}{L} \sum_k \theta(\lambda_j - \lambda_k). \quad (2.14)$$

Nous pouvons à présent déterminer la quantité  $\lambda_{j+1} - \lambda_j$  en utilisant la relation ci-dessus et ainsi obtenir dans la limite thermodynamique l'équation de Lieb [1, 33]

$$\rho_s(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d\lambda' K(\lambda, \lambda') \rho(\lambda') = \frac{1}{2\pi}, \quad (2.15)$$

où nous avons introduit la densité d'états  $\rho_s(\lambda) = d\phi(\lambda)/d\lambda$ , la distribution de rapidité  $\rho(\lambda) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_k \delta(\lambda - \lambda_k)/L$  et le noyau  $K(\lambda, \lambda') = d\theta(\lambda - \lambda')/d\lambda = 2g/((\lambda - \lambda')^2 + g^2)$ .

Il convient de remarquer qu'à température nulle l'état fondamental du système est une mer de Dirac dans laquelle chaque état entre  $-\Lambda$  et  $\Lambda$  est occupé. La conséquence est que la densité d'états  $\rho_s(\lambda)$  coïncide avec la distribution de rapidité  $\rho(\lambda)$ .

La distribution de rapidité est l'outil permettant de calculer toutes les grandeurs thermodynamiques du modèle LL, on donne par exemple l'énergie de l'état fondamental et la densité du gaz :

$$E_0 = L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) \frac{\lambda^2}{2}, \quad \rho = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda). \quad (2.16)$$

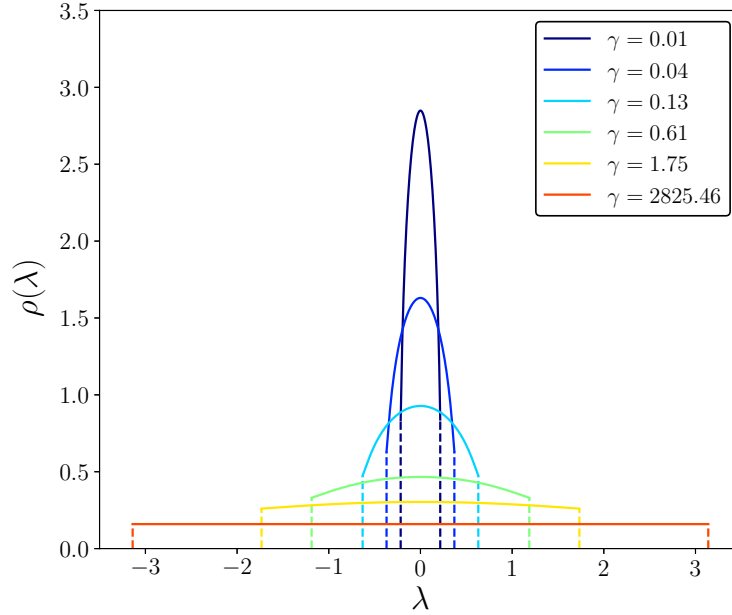


FIGURE 2.2 – La distribution de rapidité pour différentes valeurs de  $\gamma$ . À mesure que la force d'interaction augmente, la densité de rapidité s'étale pour devenir finalement constante sur son domaine de définition quand  $\gamma \rightarrow \infty$ . Cette figure est une reproduction de la figure 2 de la référence [1]

En thermodynamique on définit le potentiel chimique  $\mu(\gamma)$  comme la variation d'énergie engendrée par l'ajout d'une particule dans le système de taille fixe  $L$ , soit  $\mu(\gamma) = \left( \frac{\partial E_0(\gamma)}{\partial N} \right)_L$ . On peut alors exprimer le potentiel chimique comme

$$\mu(\gamma) = \rho^2 \left( 3e(\gamma) - \gamma \frac{de(\gamma)}{d\gamma} \right), \quad (2.17)$$

avec l'énergie moyenne par particule  $e(\gamma) = \frac{E_0}{N\rho^2}$ . On établit ainsi l'équation d'état du système reliant le potentiel chimique et la densité du gaz dans le fondamental.

Nous mentionnons également l'existence d'une astuce de calcul permettant de simplifier l'obtention numérique des grandeurs thermodynamiques ci-dessus et que l'on peut retrouver dans les références [1, 47]. En effet, en effectuant le changement de variable  $\lambda = \Lambda x$  dans la définition de la densité (2.16) et en écrivant la distribution de rapidité dépendante de la variable  $x$  comme  $\tilde{\rho}(x)$ , nous pouvons, par exemple, en déduire la rapidité maximale du fondamental  $\Lambda$

$$\Lambda = \frac{g}{\gamma} \left( \int_{-1}^1 dx \tilde{\rho}(x) \right)^{-1}. \quad (2.18)$$

Enfin, nous rappelons que dans la limite de forte interaction  $\gamma \rightarrow \infty$  les grandeurs thermodynamiques et toutes les fonctions explicites du paramètre de Lieb  $\gamma$  sont équivalentes à celles obtenue pour un modèle de fermions libres sans spin comme illustré sur les figures Fig.(2.1.2) et Fig.(2.1.2). La figure Fig.(2.1.2) n'est d'ailleurs qu'une reproduction de celle se trouvant dans les articles de Lieb et Liniger originaux [1, 33].

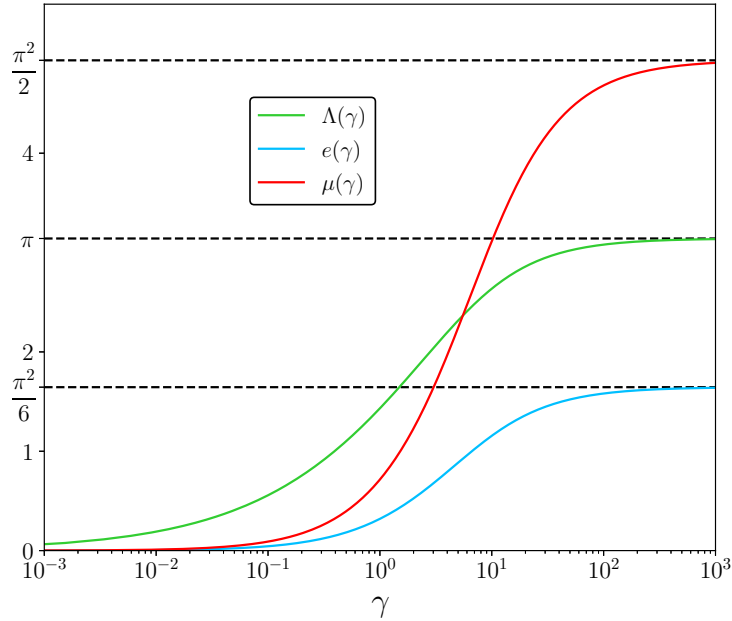


FIGURE 2.3 – Dépendance de grandeurs du modèle de Lieb-Liniger avec le paramètre  $\gamma$ . En vert, la valeur limite de la rapidité  $\Lambda$  et sa valeur asymptotique pour  $\gamma \rightarrow \infty$  :  $\pi\rho$ . En bleu, l'énergie moyenne par particules  $e(\gamma) = E_0/\rho^2 N$  et sa valeur asymptotique  $\gamma \rightarrow \infty$  :  $\pi^2/6$ . En rouge, l'énergie moyenne par particules  $\mu(\gamma) = \rho^2(3e(\gamma) - \gamma e'(\gamma))$  et sa valeur asymptotique  $\gamma \rightarrow \infty$  :  $\pi^2\rho^2/2$ . Les valeurs asymptotiques sont celles d'un gaz de fermions libres sans spin. Cette figure est une reproduction de la figure 1 de la référence [1]

### 2.1.3 Excitations dans la limite thermodynamique

Nous avons déjà mentionné que le modèle LL admet des excitations de type particule et des excitations de type trou. Elles consistent respectivement en l'ajout d'une particule d'impulsion  $\lambda_p > |\Lambda|$  et en la création d'un trou dans la mer de Dirac dont l'impulsion  $\lambda_h$  est telle que  $\lambda_h < |\Lambda|$ . Ces deux excitations changent le nombre de particule initial ce qui modifie les conditions de bords périodiques comme nous le verrons dans le cas des bosons de cœur dur.

En revanche les excitations de paires particule/trou conservent le nombre de particule initial. Ce type d'excitation peut se voir comme une combinaison des deux excitations précédentes et se construit à partir de celles-ci. Dans ce qui suit, nous montrons qu'il est possible de calculer l'énergie associée à chaque état excité à partir d'une équation analogue à (2.15).

On reprend ici la démarche du premier chapitre de la référence [46]. L'impulsion d'une particule est donnée par la relation suivante

$$k(\lambda) = \lambda + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d\nu \theta(\lambda - \nu) \rho(\nu) \quad (2.19)$$

et l'énergie à une particule s'exprime par

$$\epsilon(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d\nu \frac{g}{g^2 + (\nu - \lambda)^2} \epsilon(\nu). \quad (2.20)$$

comme nous l'avons vu, l'état fondamental du système est une mer de Dirac dont les rapidités sont bornées par  $\Lambda(\gamma)$ . Les particules interagissant les unes avec les autres, le



fait d'ajouter ou de retirer une particule va avoir un effet sur l'ensemble des particules restantes et leurs rapidités vont en être modifiées  $\{\lambda_i\} \rightarrow \{\tilde{\lambda}_i\}$ . Ainsi la relation (2.19) peut se lire comme l'impulsion de la particule "nue" (sans interactions)  $\lambda$  à laquelle on vient ajouter l'effet des collisions avec les autres particules moyenné sur l'ensemble du système. Un raisonnement analogue peut être appliqué à la relation (2.20) pour l'énergie. Pour des excitations de paires particule/trou, l'état excité possède donc respectivement l'énergie

$$E = \sum_{\#p} \epsilon(\lambda_p) - \sum_{\#h} \epsilon(\lambda_h) + E_0 \quad (2.21)$$

et l'impulsion

$$P = \sum_{\#p} k(\lambda_p) - \sum_{\#h} k(\lambda_h), \quad (2.22)$$

où nous sommes sur le nombre de particules et de trous créés et où  $E_0$  désigne l'énergie de l'état fondamental.

## 2.2 Régime de forte interaction

Dans cette section nous étudions le régime de Tonks-Girardeau pour lequel le paramètre de Lieb  $\gamma$  tend vers l'infini. Ici, le système doit payer une énergie infinie pour placer deux particules au même point de l'espace, les bosons acquièrent un comportement fermionique. La statistique de particules classiques impénétrables à une dimension a été étudié par Tonks en 1936 [48]. La correspondance entre des bosons de cœur dur et des fermions sans spin  $a$ , quant à elle, été établie par Girardeau en 1960 [49]. La fonction d'onde d'un système de  $N$  particules de cœur dur doit s'annuler lorsque la distance entre deux particules est inférieure à une longueur limite fixée par le diamètre des particules. Pour un système de fermions libres, le principe de Pauli assure la condition de cœur dur et la fonction d'onde  $\chi_N^F(x_1, \dots, x_n)$  prend la forme d'un déterminant de Slater. Cette fonction d'onde est anti-symétrique sous la permutation de deux fermions, mais nous pouvons la symétriser en la multipliant par une quantité anti-symétrique  $\prod_{1 \leq k < j \leq N} \text{sgn}(x_j - x_k)$

$$\chi_N^F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \prod_{1 \leq k < j \leq N} \text{sgn}(x_j - x_k) \chi_N^F(x_1, \dots, x_n). \quad (2.23)$$

On peut retrouver la même expression si l'on fait tendre  $\gamma \rightarrow \infty$  dans la fonction d'onde de Bethe (2.11). Dans ce cas, la phase de diffusion tend vers zéro et les coefficients  $f(\mathcal{P})$  se réduisent à  $(-1)^{|\mathcal{P}|}$ . La fonction d'onde (2.11) devient donc un déterminant de Slater multiplié par le facteur  $\prod_{1 \leq k < j \leq N} \text{sgn}(x_j - x_k)$ . Les équations de Bethe (2.12) sont également simplifiées

$$e^{i\lambda L} = (-1)^{N-1}, \quad (2.24)$$

et on observe que la parité du nombre de particules influe sur les conditions de bords. Pour un nombre impair (pair) de particules les conditions de bords sont (anti) périodiques.

Enfin, grâce à la transformation de Jordan-Wigner

$$\Psi_B(x) = e^{-i\pi \int_C dz \Psi_F^\dagger \Psi_F} \Psi_F(x) = (-1)^{N_C} \Psi_F(x), \quad (2.25)$$

où  $N_C$  est le nombre de particules dans l'intervalle  $C$ , on peut passer des opérateurs bosoniques  $\Psi_B(x)$  aux opérateurs fermioniques  $\Psi_F(x)$ . Les grandeurs thermodynamiques et les corrélations du système bosonique peuvent alors être déduites d'un système de fermions libres sans spin de même densité.

Pour atteindre le régime de Tonks-Girardeau, on peut faire varier deux paramètres : la constante d'interaction  $g$  qu'il faut augmenter ou la densité  $\rho$  qu'il faut en contraire diminuer. Le fait de diluer le gaz pour augmenter l'interaction entre ses constituants est clairement contre-intuitif et est une spécificité des systèmes 1D. En effet, pour un système en 3D on s'attend à ce que la dilution du gaz conduise à une diminution des interactions entre particules puisque la distance qui les sépare est plus importante. Expérimentalement, la dilution du gaz et la force d'interaction sont entièrement contrôlables, y compris à une dimension.

Nous mentionnons également qu'il est possible de calculer des corrections à ces grandeurs thermodynamiques dans le cas où le paramètre de Lieb est grand mais fini. Pour ce faire, il convient d'introduire le changement de variable pour la rapidité  $\lambda = \Lambda x$ , qui change la distribution de rapidité  $\rho(\lambda)$  en  $\tilde{\rho}(x)$ . Ainsi, le paramètre  $\alpha$  défini par  $\alpha = g/\Lambda$  est relié au paramètre de Lieb par la relation

$$\gamma \int_{-1}^1 dx \tilde{\rho}(x) = \alpha. \quad (2.26)$$

L'équation de Lieb (2.15) prend alors la forme

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 dy \tilde{\rho}(y) \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (y-x)^2}. \quad (2.27)$$

Compte tenu de la relation (2.26), on peut développer le noyau en puissance de  $1/\alpha$  lorsque  $\gamma \gg 1$

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 + (y-x)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(y-x)^{2i}}{\alpha^{2i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\alpha^{2i+1}} \sum_{j=0}^{2i} (-1)^j \binom{2i}{j} x^{2i-j} y^j, \quad (2.28)$$

où nous avons utilisé la formule du binôme de Newton. En injectant ce développement dans l'intégrale de l'équation (2.27) et en notant que dans le régime où  $\gamma \gg 1$  on a  $\tilde{\rho}(y) \simeq \frac{1}{2\pi}$ , l'équation (2.27) s'écrit

$$\tilde{\rho}(x) \simeq \frac{1}{2\pi} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2\pi^2 \alpha^{2i+1}} \sum_{j=0}^{2i} (-1)^j \binom{2i}{j} x^{2i-j} \frac{1 + (-1)^j}{j+1}. \quad (2.29)$$

On peut alors établir la relation entre  $\gamma$  et  $\alpha$

$$\gamma = \pi\alpha - 2 + \frac{2}{3\alpha^2} + O(\alpha^{-3}) \quad (2.30)$$

et en déduire les corrections à l'énergie moyenne par particule  $e(\gamma)$

$$e(\gamma) \simeq \frac{\pi^2}{6} - \frac{2\pi^2}{3\gamma} + \frac{\pi^2}{2\gamma^2}. \quad (2.31)$$

Grâce à ce développement, on peut donc connaître l'allure des grandeurs thermodynamiques à mesure que l'on se rapproche de la limite de Tonks-Girardeau. Bien sûr, le terme dominant dans les développements en série de Taylor sont les valeurs prédites dans la limite de Tonks-Girardeau ( $\gamma \rightarrow \infty$ ). Pour une étude mathématiquement rigoureuse du modèle de LL proche du régime de fermions libres, on peut se référer au papier de Ristivojevic [50] et Lang et al. [47, 51]

## 2.3 Régime de faible interaction

Dans cette section, nous nous intéressons à la limite de faible interaction.

Dans le cas du modèle LL, les grandeurs thermodynamiques  $f(T)$  sont analytiques sur l'ensemble de leur domaine de définition [52], il n'existe donc pas de température particulière à laquelle survient une transition de phase. Il n'y a donc pas de BEC pour le gaz de Bose unidimensionnel. Toutefois à température nulle le système semble posséder des caractéristiques similaires à celles d'un BEC, on parle alors de quasi-condensat (QBEC) [53, 54, 55]. Pour étudier les propriétés du quasi-condensat il convient d'utiliser la représentation phase-amplitude qui consiste à écrire les opérateurs canoniques bosoniques en fonction d'une phase locale  $\theta(x)$  et de la densité locale  $\rho(x)$

$$\Psi^\dagger(x) = \sqrt{\rho(x)} e^{i\theta(x)}. \quad (2.32)$$

L'intérêt de cette représentation est qu'elle permet d'étudier les fluctuations de phase et de densité. Comme on suppose que l'essentiel de la densité du système  $\rho$  est contenue dans le quasi-condensat de densité  $\rho_0$ , on s'attend à ce que les fluctuations de densité soient faibles :  $\rho(x) = \rho_0 + \delta\rho(x)$  avec  $\delta\rho(x) \ll \rho_0$ . La phase locale et les fluctuations de densités satisfont la relation de commutation suivante  $[\delta\rho(x), \theta(x')] = i \delta(x - x')$ . En injectant la relation (2.32) dans le hamiltonien de départ (2.1), on trouve au second ordre

$$(H - \mu N)^{(2)} = \int_0^L dx \left[ \frac{\hbar^2}{8m\rho_0} (\partial_x \delta\rho)^2 + \frac{g}{2} \delta\rho^2 + \frac{\hbar^2 \rho_0}{2m} (\partial_x \theta)^2 \right], \quad (2.33)$$

où nous avons introduit le potentiel chimique  $\mu$  qui constitue l'échelle en énergie du quasi-condensat. A l'intérieur du quasi-condensat, la densité est constante et est une solution de l'équation de Gross-Pitaevskii indépendante du temps  $\rho_0 = \mu/g$ . Le hamiltonien (2.33) permet alors d'étudier comment la densité fluctue autour de  $\rho_0 = \mu/g$ . En introduisant les champs  $\Gamma^\dagger(x)$  et  $\Gamma(x)$  définis par  $\Gamma^\dagger(x) = \frac{1}{2\sqrt{\rho_0}} (\rho_0 + \delta\rho(x)) + i \sqrt{\rho_0} \theta(x)$  et qui respectent la relation de commutation suivante  $[\Gamma(x), \Gamma^\dagger(x')] = \delta(x - x')$ , on peut simplifier le hamiltonien (2.33) :

$$(H - \mu N)^{(2)} = \frac{1}{2L} \sum_q \begin{pmatrix} \Gamma_{-q} \\ \Gamma_q^\dagger \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \mu & \mu \\ \mu & \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{-q} \\ \Gamma_q^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Nous avons introduit les modes de Fourier  $\Gamma_q^\dagger = \int_0^L dx e^{iqx} \Gamma^\dagger(x) = \frac{1}{2\sqrt{\rho_0}} \tilde{\rho}_q + i \sqrt{\rho_0} \tilde{\theta}_q$  avec  $q \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}$  et utilisé la relation  $\mu = g\rho_0$ . La diagonalisation de l'hamiltonien ainsi obtenu se fait par la transformation de Bogoliubov

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{-q} \\ \Gamma_q^\dagger \end{pmatrix} = \sqrt{L} \begin{pmatrix} \bar{u}_{-q} & \bar{v}_{-q}^* \\ \bar{v}_q & \bar{u}_q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{-q} \\ b_q^\dagger \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

avec  $\bar{u}_q = \cosh(\tilde{\theta}_q/2)$ ,  $\bar{v}_q = -\sinh(\tilde{\theta}_q/2)$ , et  $\tanh(\tilde{\theta}_q) = \frac{\mu}{\mu + \frac{\hbar^2 q^2}{2m}}$ . Le hamiltonien obtenu s'exprime à l'aide des modes de Bogoliubov,

$$(H - \mu N)^{(2)} = \sum_q \epsilon_q b_q^\dagger b_q + \text{const.}, \quad (2.36)$$

dont la relation de dispersion est  $\epsilon_q = \sqrt{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \left( \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2\mu \right)}$ . Ici les fluctuations de densité correspondent aux excitations des modes de Bogoliubov. En particulier pour un mode  $q$  tel que  $\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \ll \mu$  la relation de dispersion est linéaire  $\epsilon_q \approx \sqrt{\frac{\hbar^2 \mu}{m}} q$  et les excitations élémentaires [1, 16, 24] sont des ondes de densités se propageant à la vitesse du son  $v_s = \sqrt{\frac{\hbar^2 \mu}{m}}$ .

Du fait de la richesse des phénomènes physiques qu'il permet d'étudier, le modèle LL est très souvent utilisé pour décrire les expériences de gaz d'atomes froids, quelque soit le régime d'interaction considéré. Toutefois, pour se rapprocher au mieux des conditions de l'expérience, il est indispensable de tenir compte du potentiel de piégeage. La prise en compte de ce potentiel de confinement dans la description théorique d'une expérience d'atomes froids est l'objet de chapitre 3. Nous y introduisons l'approximation de densité locale et l'appliquons au modèle LL.

# Chapitre 3

## L'approximation de densité locale

Lors d'une expérience d'atomes ultra froids, les enjeux majeurs sont, d'une part, le refroidissement du nuage atomique et d'autre part le confinement du gaz dans une région spécifique, afin d'étudier ses propriétés physique. La présence du potentiel de piégeage modifie radicalement le comportement du gaz d'atomes et il n'existe pas encore de théorie générale permettant la description précise du système de particules au sein du potentiel de confinement. Toutefois, dans la communauté des atomes froids, il est commun d'utiliser une approximation dite de densité locale qui offre la possibilité de déduire certains effets induits par le potentiel de piégeage en utilisant l'équation d'état du gaz sans confinement. Bien que largement utilisée [56, 57, 58, 59, 60], cette approximation n'est pas suffisante pour rendre compte de phénomènes physiques observés expérimentalement. Dans la suite de ce chapitre, nous revenons plus en détails sur le principe de la LDA et son domaine de validité. Ensuite, nous discutons son utilisation dans le cadre d'expériences d'atomes froids et présentons quelques exemples pour lesquels la LDA est en échec. Enfin, nous appliquons l'approximation de densité locale au cas de gaz de Bose en présence d'un potentiel de confinement, nous traitons également les cas limites du modèle (gaz de Tonks-Girardeau et quasi-condensat).

### 3.1 Principe de la méthode

Le fait d'utiliser des potentiels de piégeage pour confiner le gaz d'atomes froids rend plus difficile l'étude des propriétés du gaz. En effet, la présence du potentiel brise l'homogénéité du gaz et il n'existe pas de théorie générale permettant de prédire le comportement d'un nuage d'atomes inhomogène. Toutefois, il est possible de mettre en évidence les effets du potentiel sur le gaz en utilisant l'approximation de la densité locale ou local density approximation (LDA) en anglais. Cette approximation repose sur l'hypothèse de séparation d'échelles, en plus de la distance inter-particules  $d$  et de la taille du système  $L$ , on introduit une échelle de longueurs intermédiaire (mésoscopique) à partir de laquelle le gaz apparaît comme un fluide continu. A cette échelle, on subdivise le système en une assemblée de cellules fluides indépendantes de taille  $l$  telle que  $d \ll l \ll L$  et au sein desquelles on suppose les variations du potentiel suffisamment lentes pour considérer le sous-système comme homogène. Plus précisément, cette approximation est considérée comme valable tant que la distance typique sur laquelle le potentiel de piégeage varie  $\ell \sim |\partial_x V/V|^{-1}$  est plus grande que la longueur de relaxation ('healing length')  $\xi = (2m\mu/\hbar^2)^{-1/2}$ . Cette dernière constitue la distance la plus courte sur laquelle la fonction d'onde du système peut changer, c'est aussi la distance pour laquelle l'énergie cinétique est égale à l'énergie d'in-

teraction entre particules. Ainsi, à l'échelle des variations du potentiel, la fonction d'onde locale décrivant le sous-système est constante. On définit alors pour chaque cellule une densité effective locale  $\rho(\mu_{\text{eff}}(x))$  où  $\mu_{\text{eff}}(x)$  est un potentiel chimique effectif qui dépend de la valeur du potentiel  $V$  au point  $x$ ,  $\mu_{\text{eff}}(x) = \mu - V(x)$ . On se retrouve ainsi avec une collection de sous-systèmes localement homogènes satisfaisant la relation suivante :

$$N = \int_0^L dx \rho(\mu - V(x)), \quad (3.1)$$

où  $\mu$  est le potentiel chimique du système.

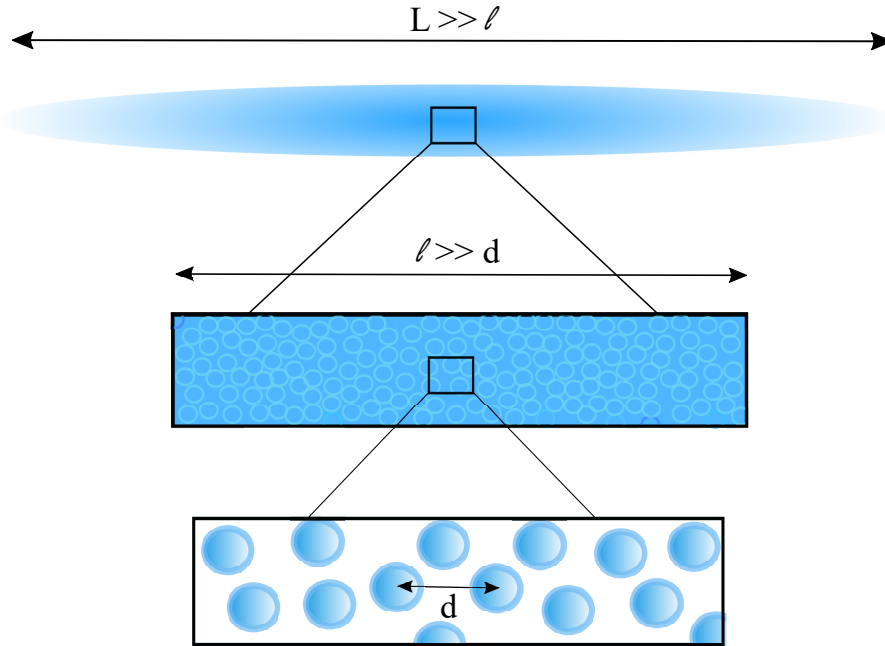


FIGURE 3.1 – Illustration représentant les trois échelles de longueurs existantes pour un gaz d'atomes froids.

D'après la condition de validité de la LDA, on ne s'attend pas à ce qu'elle puisse s'appliquer aux bords du piège, là où les variations du potentiel sont importantes. Loin du centre, la densité est très faible et la physique de cette région est essentiellement de la physique à une particule. Aux bords du piège, par effet tunnel, la probabilité de trouver une particule en dehors du potentiel est non nulle, ce qui se traduit par une densité exponentiellement décroissante dans ces régions. Ce comportement est connu et il est possible de retrouver cette décroissance en étudiant l'équation de Schrödinger pour une particule en présence d'un potentiel linéaire. La solution de l'équation de Schrödinger s'exprime en terme de fonctions de Airy. Pour une étude complète de ce phénomène au bord du potentiel de piégeage, nous renvoyons les lecteurs à la référence [61].

## 3.2 Application au modèle de Lieb-Liniger

Dans la sous-partie précédente, on a vu qu'on pouvait séparer le gaz de Bose inhomogène en une collection de sous-systèmes indépendants étant des répliques du gaz de Bose homogène avec potentiel chimique effectif  $\mu_{\text{eff}}(x) = \mu - V(x)$ . Pour construire la

densité locale obéissant à la relation (3.1), on doit établir la relation entre la densité et le potentiel chimique du système homogène. Si on considère un potentiel harmonique  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ , on peut déterminer explicitement la relation entre  $N$  et  $\mu$  dans les régimes de forte et faible interaction. C'est ce que nous faisons ci-après.

Dans la limite  $\gamma \rightarrow \infty$ , le gaz de bosons se comporte comme un gaz de fermions libres sans spin. Le potentiel chimique peut s'écrire  $\mu_{TG} = \hbar^2 \pi^2 \rho^2 / 2m$  pour le système homogène. En inversant cette relation on exprime facilement la densité en fonction du potentiel chimique :

$$\rho = \frac{1}{\pi \hbar} \sqrt{2m \mu_{TG}}. \quad (3.2)$$

Ainsi au sein des cellules fluides, le potentiel local a la même forme que dans la relation ci-dessus en changeant le potentiel chimique  $\mu_{TG}$  par le potentiel chimique effectif  $\mu - V(x)$  :

$$\rho_{LDA}(x) = \frac{1}{\pi \hbar} \sqrt{2m(\mu - V(x))}. \quad (3.3)$$

Grâce à la relation (3.1), on peut alors relier le potentiel chimique global  $\mu$  et le nombre de particule  $N$ . Comme mentionné plus haut, l'intégration de  $\rho_{LDA}(x)$  peut se faire explicitement dans le cas d'un potentiel harmonique  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$

$$N = \frac{1}{\pi \hbar} \int_{-R}^R dx \sqrt{2m \left( \mu - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right)} = \frac{\mu}{\hbar \omega}, \quad (3.4)$$

où nous avons introduit l'extension spatiale du nuage atomique  $R = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}}$ , qui découle du fait que  $\mu_{\text{eff}}(\rho(x))$  doit être positif. L'expression de la densité (3.3) n'est valable que dans l'intervalle  $[-R, R]$ . La relation (3.4) montre que le potentiel chimique est proportionnel à  $N\hbar\omega$ , qui est l'énergie moyenne d'un système de  $N$  fermions occupant les  $N$  premiers niveaux de l'oscillateur harmonique.

Pour la limite opposée  $\gamma \rightarrow 0$ , la stratégie est la même, on écrit la relation d'état  $\mu_{GP} = g\rho$ , puis on inverse la relation. Le densité locale se lit alors :

$$\rho_{LDA}(x) = \frac{\mu - V(x)}{g}. \quad (3.5)$$

Dans le cas d'un potentiel harmonique, la relation entre  $N$  et  $\mu$  s'obtient également facilement

$$N = \frac{1}{g} \int_{-R}^R dx \left( \mu - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) = \frac{4}{3} \frac{l_0}{g} \sqrt{\frac{2m l_0^2}{\hbar^2}} \mu^{3/2}, \quad (3.6)$$

où  $l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ .

On a vu que la limite thermodynamique du modèle LL permet de déterminer des observables physiques en fonction du paramètre  $\gamma$ . On rappelle que la définition du potentiel chimique pour des valeurs de  $\gamma$  finies est donnée par :

$$\mu_{LL}(g, \gamma) = \left( \frac{g}{\gamma} \right)^2 \left( 3e(\gamma) - \gamma \frac{de(\gamma)}{d\gamma} \right), \quad (3.7)$$

avec  $\rho = g/\gamma$ . Ainsi, en fixant la force de répulsion  $g$  on peut construire le potentiel chimique et la densité du modèle LL pour une gamme de  $\gamma$  donnée. Numériquement on peut alors créer la fonction  $\rho_{\text{LDA}}(\mu - V(x))$  et en fixant le nombre de particules  $N$  la relation (3.1) permet d'extraire le potentiel chimique du système inhomogène  $\mu$ .

La LDA repose donc sur une hypothèse de séparation d'échelles permettant d'approcher le gaz comme s'il s'agissait d'un fluide. Dans la prochaine section, nous proposons de regarder la LDA d'une autre manière et d'y apporter des corrections afin d'en améliorer la précision.

### 3.3 Échecs de la LDA

Dans cette section, nous donnons quelques exemples physiques dans lesquels l'approximation de densité locale ne parvient pas à reproduire les effets observés expérimentalement. L'objectif de cette section n'est pas de traiter en profondeur chaque exemple, mais de donner une brève présentation du phénomène physique.

Le premier exemple est celui du comportement réentrant de la fréquence d'oscillation du mode respiratoire pour le gaz de Bose à une dimension. Ce phénomène se produit lors d'expériences d'atomes froids où le gaz de bosons est confiné à l'aide d'un potentiel harmonique caractérisé par une fréquence  $\Omega_z$ . La présence du potentiel de piégeage modifie le spectre en énergie et le rend discret. En apportant un changement soudain de la fréquence  $\Omega_z$  [62, 63, 3], on peut alors exciter des modes d'oscillations particuliers, dont l'un d'entre eux, caractérisé par une fréquence  $\Omega_b$ , est appelé mode respiratoire. Comme la fréquence des oscillations associées au mode respiratoire dépend de la force d'interaction (répulsive)  $g$  et que l'on peut mesurer très précisément ladite fréquence, on peut alors quantifier les excitations collectives de basse énergie pour les différents régimes d'interaction. Ainsi, il a été établi expérimentalement pour le gaz de Bose dégénéré [2] que le rapport  $\Omega_b/\Omega_z$  varie de manière continue entre le régime de non interaction  $g = 0$  et celui de Tonks-Girardeau ( $g \rightarrow \infty$ ).

En particulier, la variation du rapport des fréquences avec  $g$  peut être séparée en deux transitions distinctes (ici "transition" est à comprendre au sens de "crossover" en anglais). En partant du régime de Tonks-Girardeau et en diminuant progressivement la valeur de  $g$ , le rapport  $\Omega_b/\Omega_z$  diminue pour atteindre un minimum, passant respectivement de la valeur  $\Omega_b/\Omega_z = 2$  pour Tonks-Girardeau à  $\Omega_b/\Omega_z = \sqrt{3}$  pour le régime de quasicondensat. Lorsque  $g$  diminue davantage, on observe alors un "rebond" et le rapport  $\Omega_b/\Omega_z$  augmente pour atteindre la valeur 2, correspondant au régime sans interaction. Cette augmentation pour les très faibles valeurs de  $g$  est appelée comportement réentrant. Le crossover entre gaz de Bose sans interaction et quasicondensat a également été étudié à température finie [63, 64, 3, 65]. Depuis une vingtaine d'années, ce comportement réentrant a été étudié théoriquement en utilisant la LDA [66, 4] et en se limitant au cas  $T = 0$ . Jusqu'à présent, la LDA donne une bonne description de la transition quasicondensat/Tonks-Girardeau, mais échoue à prédire le comportement réentrant de la fréquence respiratoire.

Un autre exemple concerne les mélanges d'atomes fermioniques dont le spin est polarisé à basse température. De tels systèmes présentent des caractéristiques fermioniques et bosoniques. En effet, on peut y observer la formation de molécules diatomiques et de paires de Cooper, ayant des propriétés bosoniques. Il demeure également des fermions non appariés. Ces systèmes permettent alors d'étudier, par exemple, le crossover existant entre BEC et états BCS ou le phénomène de superfluidité [67]. L'une des expériences les plus célèbres, est celle réalisée par Partridge *et al.* [68] dans laquelle on étudie la densité de



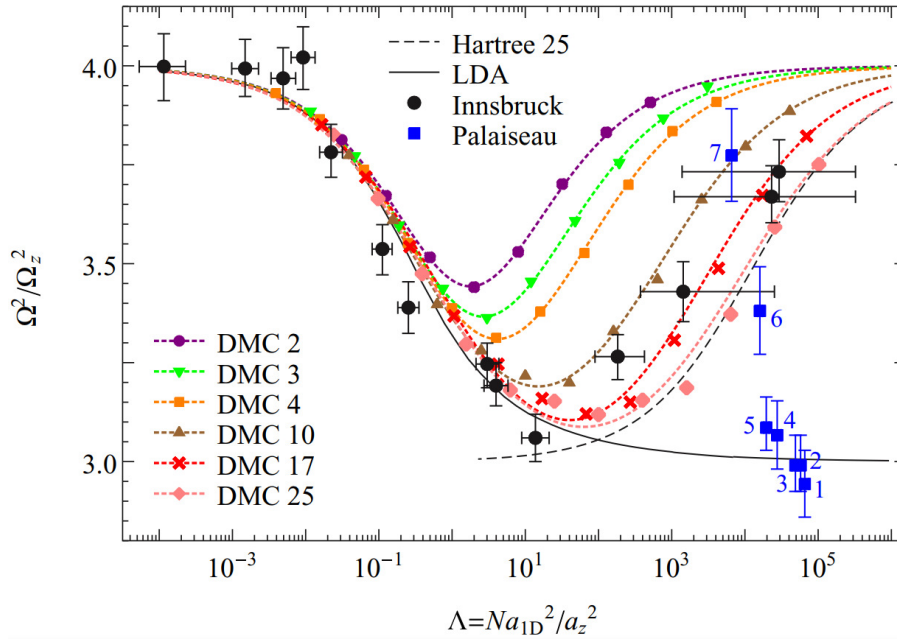


FIGURE 3.2 – Evolution du rapport  $\Omega_b/\Omega_z$  en fonction du paramètre  $\Lambda$  qui dépend du nombre de particule  $N$ , de  $a_z = \sqrt{\hbar/m\Omega_z}$  et de  $a_{1D} = -2\hbar/mg$ . Les courbes colorées sont issues de simulations Monte Carlo. La LDA est représentée par la courbe noire tandis que l'approximation de Hartree est représentée par les pointillés noirs. Les points noirs et les carrés bleus sont des données expérimentales provenant respectivement de [2] et [3]. Cette figure est tirée, avec permission, de la référence [4], Copyright(2015) par l'American Physical Society.

fermions de spin up  $n_\uparrow$  et la densité de fermions de spin down  $n_\downarrow$  en fonction de la position à l'intérieur du piège. Plus précisément, les auteurs s'intéressent à la différence entre ces deux densités, soit la densité de fermions non appariés. Leurs expériences montrent que cette densité développe une structure en double pics pour certaines valeurs de polarisation. D'après Patridge et son équipe, les deux pics indiquent que les fermions non appariés sont expulsés du centre du système vers la périphérie et que ces derniers agissent comme une coquille qui entoure les espèces restées au centre. Comme mentionné plus haut, cet effet échappe complètement à la LDA [69]. Toutefois, cette structure en double pic peut être retrouvée en incorporant des termes correctifs à la LDA. C'est l'objet de la référence [5].

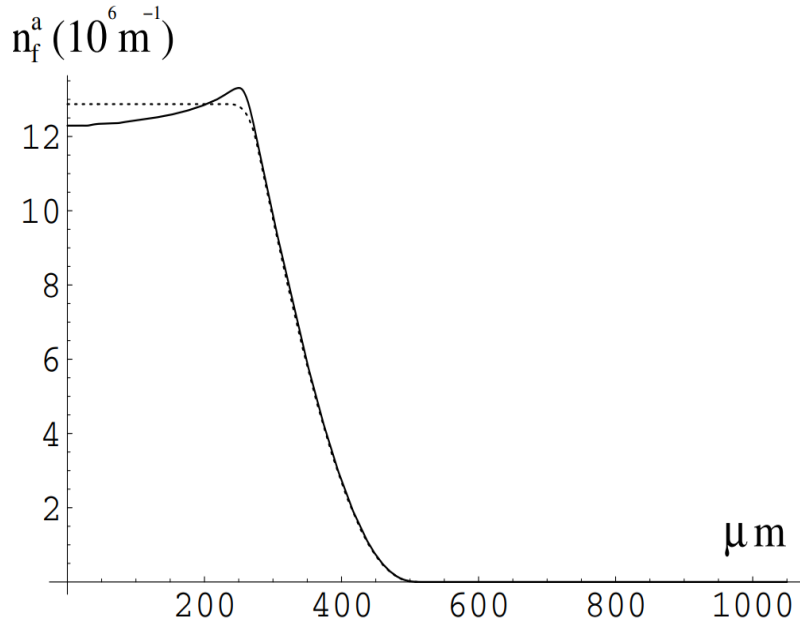


FIGURE 3.3 – Densité de fermions non appariés selon la LDA en pointillés et selon la LDA corrigée en trait plein. Les termes correctifs permettent de retrouver cette structure en pic qui échappe à la LDA standard. Cette figure est tirée, avec permission, de la figure 2 de la référence [5], Copyright(2006) par l’American Physical Society.

Dans cet article, les auteurs partent du hamiltonien de Bose-Fermi en présence d’un potentiel de confinement et écrivent la densité d’énergie du système comme une fonctionnelle des densités bosoniques et fermioniques. Cette fonctionnelle se décompose en deux termes, l’un bosonique et l’autre fermionique. La partie fermionique correspond au terme cinétique du hamiltonien et est donnée par la théorie de Thomas-Fermi, à laquelle les auteurs ajoutent des corrections en gradient de la densité issues de la référence [70]. Ces termes correctifs apparaissent comme des contributions quantiques (au sens de proportionnelles à  $\hbar$ ) par rapport la fonctionnelle de Thomas-Fermi. En minimisant l’énergie du système par rapport aux densités fermioniques et bosoniques, ils obtiennent alors une expression pour le potentiel chimique effectif associé aux fermions

$$\mu_f - V(r) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( (6\pi^2 n_f)^{2/3} + \frac{1}{36} \left( \frac{(\nabla n_f)^2}{n_f^2} - 2 \frac{\nabla^2 n_f}{n_f} \right) \right) + g_{bf} n_b \quad (3.8)$$

et une autre expression pour le potentiel chimique effectif associé aux bosons

$$\mu_b - 2V(r) = \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n_b}}{\sqrt{n_b}} + g_{bf} n_f + g_{bb} n_b, \quad (3.9)$$

où  $V(r)$  est le potentiel de piégeage,  $n_{b,f}$  sont les densités bosonique et fermionique et  $g_{bb}$  et  $g_{bf}$  sont les constantes mesurant respectivement les interactions entre bosons et entre bosons et fermions. A l’ordre zéro, les potentiels chimiques effectifs sont ceux donnés par la LDA standard. La méthode et les corrections à la LDA relatées dans les articles ci-dessus sont similaires à celles obtenues pour le gaz de Tonks-Girardeau à une dimension, que l’on discutera dans le chapitre 6 de ce manuscrit.

Bien que son usage soit répandu dans la communauté des atomes froids, il existe néanmoins des situations pour lesquelles la LDA n’est pas en mesure de capturer le phénomène physique observé. Pour aller au delà de cette approximation et comme nous venons de

le voir, il n'est pas rare de calculer des termes correctifs à la LDA qui sont adaptés au problème considéré. Nous revenons sur l'intérêt d'ajouter des corrections à la LDA dans le chapitre 6.

# Chapitre 4

## Dynamique d'un système quantique ouvert

Ce chapitre est dédié à l'étude de la dynamique d'un système quantique ouvert, c'est-à-dire un système interagissant avec son environnement. En pratique, aucun système n'est complètement isolé de son environnement, il demeure toujours un couplage système-environnement. La conséquence de la présence de ce couplage est que l'évolution temporelle du système n'est plus seulement unitaire, mais aussi dissipative. Pour étudier la dynamique non unitaire du système, on cherche à écrire l'équation maîtresse qui régit l'évolution temporelle de l'état du système et la dynamique des observables physiques du système. En général, il n'est pas possible de résoudre une telle équation et il est nécessaire d'utiliser des approximations quant à l'évolution temporelle de l'état du système. Dans ce chapitre nous considérons une dynamique dite markovienne, on suppose que l'état futur du système ne dépend que de l'état du système à l'instant présent. En se basant sur cette approximation, nous proposons, dans ce chapitre, de présenter le formalisme utilisé pour décrire un système quantique ouvert et de construire l'équation maîtresse d'un processus Markovien : l'équation de Lindblad [71].

L'équation de Lindblad est largement utilisée dans divers domaines comme dans l'informatique quantique [72] où les processus dissipatifs permettent de générer des états purs à plusieurs particules. Les phénomènes de transport dans les systèmes en basse dimension [73, 74] peuvent également être décrits par l'équation de Lindblad. Elle est aussi utilisée dans la communauté des atomes ultrafroids pour la description des phénomènes de pertes atomiques [34, 35, 37, 75], que nous abordons dans le chapitre 7 de ce manuscrit. Les pertes atomiques se produisent naturellement dans les expériences d'atomes ultrafroids et ne peuvent être évitées.

Les sections suivantes sont dédiées à la présentation du formalisme permettant d'aboutir à l'équation de Lindblad. Le développement qui suit est basé sur les références [76, 77] et reprend une partie de leur notation et de leur raisonnement.

### 4.1 Couplage système-environnement

#### 4.1.1 Dissipation d'énergie

Nous étudions l'ensemble système-environnement vivant dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$  construit comme le produit tensoriel entre l'espace de Hilbert du système  $\mathcal{H}_S$  et celui de l'environnement  $\mathcal{H}_E$ . Au sein de cet espace de Hilbert composite, on peut

définir un opérateur hamiltonien  $H_S$  n'agissant de manière non-triviale que sur les degrés de liberté de  $\mathcal{H}_S$  :  $H_S = H_s \otimes \mathbb{I}_e$  où  $\mathbb{I}_e$  est l'identité définie dans  $\mathcal{H}_E$ . Nous introduisons à présent une interaction entre le système et son environnement que l'on note  $V = V(V_S, V_E)$  et qui est fonction d'opérateurs vivant respectivement dans le système et l'environnement. Ainsi le Hamiltonien total s'écrit  $H_{\text{tot}} = H_S + H_E + V$  et on ne peut donc plus faire commuter le Hamiltonien du système  $H_S$  avec le Hamiltonien total.

En écrivant l'équation d'évolution pour la valeur moyenne du Hamiltonien du système dans un état  $\rho$ , on arrive à

$$\frac{d\langle H_S \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \text{Tr}([H_{\text{tot}}, H_S(t)] \rho) = \frac{i}{\hbar} \text{Tr}([V(t), H_S(t)] \rho), \quad (4.1)$$

ce qui traduit une dissipation d'énergie du système vers l'environnement. Cette situation peut correspondre à un refroidissement du système plongé dans un bain thermique dont la température est inférieure à celle du système à l'instant initial.

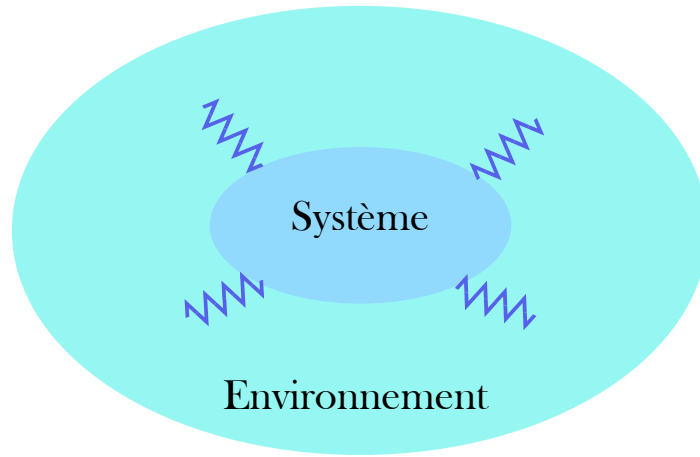


FIGURE 4.1 – Schéma symbolisant un système ouvert et son environnement. Les couplages sont représentés par les zigzags qui connectent donc le système et l'environnement.

### 4.1.2 Evolution temporelle du système

Supposons que l'état de l'ensemble système-environnement peut être décrit par la matrice densité  $\rho$ . L'évolution temporelle de cet état est donnée par l'équation de Liouville

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho, H_{\text{tot}}] = \frac{i}{\hbar} [\rho, H_S + H_E + V]. \quad (4.2)$$

Comme nous voulons étudier l'évolution du système, nous devons prendre la trace de l'équation de Liouville sur les degrés de liberté de l'environnement. De manière générale, on peut décomposer l'opérateur densité sur un jeu de deux familles de vecteurs  $\{u_i\}$  et  $\{v_j\}$  vivant respectivement dans l'espace de Hilbert du système  $\mathcal{H}_S$  et de l'environnement  $\mathcal{H}_E$

$$\rho = \sum_{ijkl} \rho_{ijkl} |u_i\rangle \langle u_j| \otimes |v_k\rangle \langle v_l|, \quad (4.3)$$

dont la trace sur l'environnement s'écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_E(\rho) &= \sum_{ijkl} \rho_{ijkl} |u_i\rangle \langle u_j| \sum_n \langle v_n | |v_k\rangle \langle v_l| |v_n\rangle \\ &= \sum_{ijk} \rho_{ijkk} |u_i\rangle \langle u_j| = \rho^{\mathrm{red.}}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

La trace sur l'environnement des deux premiers commutateurs présents dans l'équation de Liouville (4.2) se calcule facilement

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}_E([\rho, H_S]) = \sum_{ijk} \rho_{ijkk} [|u_i\rangle \langle u_j|, H_S] = [\rho^{\mathrm{red.}}, H_S] \\ \mathrm{Tr}_E([\rho, H_E]) = \sum_{ijkl} \rho_{ijkl} |u_i\rangle \langle u_j| \mathrm{Tr}_E([|v_k\rangle \langle v_l|, H_e]) = 0 \end{cases}\quad (4.5)$$

mais pour le commutateur avec le potentiel de couplage  $V$ , plusieurs précisions sont nécessaires.

Faisons l'hypothèse que le couplage système-environnement peut se mettre sous la forme  $V = \alpha V_s \otimes V_e$ , où  $\alpha$  est un paramètre pris petit et écrivons l'équation de Liouville (4.2) en représentation interaction

$$\frac{d\rho_I(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho_I(t), V_I(t)],\quad (4.6)$$

avec  $\rho_I(t) = e^{i(H_S+H_E)t/\hbar} \rho e^{-i(H_S+H_E)t/\hbar}$  et  $V_I(t) = e^{i(H_S+H_E)t/\hbar} V e^{-i(H_S+H_E)t/\hbar}$ . Cette équation admet la solution suivante

$$\rho_I(t) = \rho_I(0) + \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [\rho_I(t'), V_I(t')],\quad (4.7)$$

qui une fois injectée dans (4.6) donne

$$\frac{d\rho_I(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho_I(0), V_I(t)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [[\rho_I(t'), V_I(t')], V_I(t)].\quad (4.8)$$

En prenant la trace sur l'environnement, le premier terme du membre de droite de l'équation ci-dessus s'écrit

$$\mathrm{Tr}_E([\rho_I(0), V_I(t)]) = \alpha [\rho_s, V_{sI}(t)] \mathrm{Tr}_E(V_e \rho_{eI}(t)),\quad (4.9)$$

où nous avons posé  $\rho_I(0) = \rho(0) = \rho_s \otimes \rho_e$ . On constate alors que le terme ci-dessus dépend de la valeur moyenne de la variable  $V_e$  prise au temps  $t$  lorsque l'environnement est dans un état  $\rho_e$ . Dans le cas où cet état est stationnaire,  $[\rho_e, H_e] = 0$ , on peut annuler la valeur moyenne de  $V_e$  en travaillant avec la variable centrée  $V_e \rightarrow V_e - \langle V_e \rangle$ . Sous ces considérations, la trace sur l'environnement de l'équation (4.8) s'écrit

$$\frac{d\rho_I^{\mathrm{red.}}(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \mathrm{Tr}_E([[ \rho_I(t'), V_I(t') ], V_I(t)].\quad (4.10)$$

Comme l'interaction entre le système et l'environnement est quantifiée par le paramètre  $\alpha$ , on constate que les variations temporelles de l'opérateur densité réduit au système sont de l'ordre de  $\alpha^2$ . Or on a supposé que le paramètre  $\alpha$  était proche de zéro et on peut ainsi faire l'approximation que les corrélations entre le système et l'environnement sont négligeables sur un laps de temps  $dt$ . Du point de vue de Heisenberg, cela revient à

écrire  $\rho_I(t) = \rho^h(t) = \rho_s^h(t) \otimes \rho_e = \rho_I^{\text{red.}}(t) \otimes \rho_e$ , où nous faisons toujours l'hypothèse que l'environnement est dans un état stationnaire.

Une autre approximation peut être utilisée pour simplifier davantage le problème. En effet, l'équation (4.10) est non-locale dans le sens où l'état du système à l'instant  $t$  dépend de son évolution, de son histoire passée sur l'intervalle  $[0, t]$ . En se plaçant dans l'approximation Markovienne, on peut considérer que le couplage système-environnement détruit la mémoire du système et ce dernier n'est alors plus influencé par son histoire. On peut alors effectuer la substitution  $\rho_I^{\text{red.}}(t') = \rho_I^{\text{red.}}(t)$  pour  $t' < t$  conduisant à

$$\frac{d\rho_I^{\text{red.}}(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E([\rho_I^{\text{red.}}(t) \otimes \rho_e, V_I(t')], V_I(t)). \quad (4.11)$$

Le double commutateur donne quatre termes faisant intervenir les corrélations temporelles de  $V_e$  dans l'environnement  $\text{Tr}_E(V_e(t' - t)V_e \rho_e)$ . Puisque nous souhaitons décrire les corrélations entre les variables du système et celles de l'environnement, nous supposons que les corrélations temporelles au sein du système décroissent de manière exponentielle sur un temps caractéristique  $\tau$ , soit  $\text{Tr}_E(V_e(t' - t)V_e \rho_e) \propto e^{-|t'-t|/\tau}$ .

En intégrant les quatre termes sur un temps long  $t \rightarrow \infty$  et après un réarrangement des termes, on obtient l'équation dite de Lindblad [76, 77]

$$\frac{d\rho_I^{\text{red.}}(t)}{dt} = \tau\alpha^2 \left( V_s \rho_I^{\text{red.}}(t) V_s - \frac{1}{2} \{V_s V_s, \rho_I^{\text{red.}}(t)\} \right). \quad (4.12)$$

Cette équation et l'ensemble du formalisme présenté dans ce chapitre est à la base du travail réalisé dans le chapitre 7 de ce mémoire.

# Chapitre 5

## Dynamique dans l'espace des phases

### 5.1 Transformée de Weyl et fonction de Wigner

La différence fondamentale entre la mécanique classique et la mécanique quantique est l'information sur la position et la vitesse d'une particule. En mécanique quantique le principe de Heisenberg limite la précision avec laquelle on peut mesurer la vitesse d'une particule connaissant sa position et inversement. L'absence d'une telle contrainte en mécanique classique permet de décrire une particule dans l'espace des phases à l'aide d'une distribution de probabilité qui contient toute l'information sur la position et la vitesse de la particule. Néanmoins, dans un point de vue semi-classique, il est possible d'introduire un outil mathématique respectant le principe de Heisenberg tout en partageant certaines propriétés d'une distribution de probabilité classique. C'est cet outil que l'on appelle la distribution de Wigner introduite en 1932 [78].

La distribution ou fonction de Wigner est souvent utilisée en mécanique quantique [24, 79, 80, 81, 82] et décrit une distribution de quasi-probabilité dans l'espace des phases, dans la mesure où elle permet d'exprimer la moyenne d'observables physiques. Il ne s'agit pas, en revanche, d'une véritable distribution de probabilité car la fonction de Wigner n'est pas forcément positive sur l'espace des phases. On considère la transformation de Weyl [83] qui permet de passer d'un opérateur  $A$  à une fonction dépendant de  $x$  et  $p$  (variables classiques)  $\mathcal{A}(x, p)$  :

$$\mathcal{A}(x, p) = \int dy e^{\frac{-i p y}{\hbar}} \langle x + \frac{y}{2} | A | x - \frac{y}{2} \rangle. \quad (5.1)$$

Ainsi on définit la fonction de Wigner comme la transformation de Weyl de l'opérateur  $\frac{\hat{\rho}}{\hbar}$ , où  $\rho$  est l'opérateur densité :

$$W(x, p) = \frac{1}{\hbar} \int dy e^{\frac{-i p y}{\hbar}} \langle x + \frac{y}{2} | \rho | x - \frac{y}{2} \rangle \quad (5.2)$$

Pour un état pur  $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$ , il vient alors naturellement la notation suivante :

$$W(x, p) = \frac{1}{\hbar} \int dy e^{\frac{-i p y}{\hbar}} \psi(x + \frac{y}{2}) \psi^*(x - \frac{y}{2}). \quad (5.3)$$

La fonction de Wigner pour  $N$  particules s'écrit :

$$W_N(x, p) = \frac{N}{\hbar} \prod_{j=2}^N \int dx_j \int dy e^{\frac{-i p y}{\hbar}} \phi^*(x - \frac{y}{2}, x_2, \dots, x_N) \phi(x + \frac{y}{2}, x_2, \dots, x_N) \quad (5.4)$$



avec  $\phi(x + \frac{y}{2}, x_2, \dots, x_N)$  la fonction d'onde à  $N$  particules, soit un déterminant de Slater pour un système de  $N$  fermions non interagissants. En seconde quantification la fonction de Wigner à  $N$  particules peut également s'écrire :

$$W_N(x, p) = \frac{1}{h} \int dy e^{-\frac{i}{h}py} \left\langle \Psi_F^\dagger(x - \frac{y}{2}) \Psi_F(x + \frac{y}{2}) \right\rangle, \quad (5.5)$$

où nous avons introduit les champs canoniques fermioniques obéissant à la relation d'anti-commutation  $\{\Psi_F(x), \Psi_F^\dagger(y)\} = \delta(x-y)$ . Le terme  $\left\langle \Psi_F^\dagger(x - \frac{y}{2}) \Psi_F(x + \frac{y}{2}) \right\rangle$  est la fonction de corrélation à deux points et est défini comme la moyenne prise dans l'état fondamental à  $N$  particules de l'opérateur de création de particule au point  $(x - \frac{y}{2})$  et d'annihilation au point  $(x + \frac{y}{2})$ .

De ces relations on peut en déduire des propriétés importantes de la fonction de Wigner d'un système de  $N$  fermions :

$$\begin{cases} \int dp W_N(x, p) & = \rho(x) \\ \int dx W_N(x, p) & = \rho(p) \\ \int \int dp dx W_N(x, p) & = N. \end{cases} \quad (5.6)$$

L'intégration de la fonction de Wigner sur les impulsions donne bien la densité de probabilité de présence au point  $x$ .

Dans la limite classique, la densité de quasi-probabilité se concentre sur les contours d'énergie classique dans l'espace des phases. Le comportement de la fonction de Wigner sur les bords du contour diffère de celui du bulk [84, 79]. On peut montrer que pour un système de  $N$  fermions, la fonction de Wigner vaut une constante à l'intérieur du contour de Fermi [79] et zéro ailleurs :  $W_N(x, p) = \theta_H(E_F - \frac{p^2}{2m} - V(x))$ . Sur les bords du domaine, la fonction de Wigner dépend de la fonction de Airy.

## 5.2 Evolution temporelle de la fonction de Wigner

L'intérêt de la fonction de Wigner est d'étudier la dynamique d'un système quantique dans l'espace des phases à l'aide de l'équation de Liouville-von Neumann. Dans cette approche, les effets quantiques apparaissent comme des corrections à la dynamique classique. Partant de l'équation de Liouville  $\partial_t \rho = \frac{i}{\hbar} [\rho, H]$  et en appliquant la transformée de Weyl à la matrice densité  $\rho$ , on en déduit l'équation régissant la dynamique de la fonction de Wigner :

$$\partial_t W(x, p) + \frac{p}{m} \partial_x W(x, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{\hbar^2}{4} \right)^n \frac{\partial_x^{2n+1} V(x)}{(2n+1)!} \partial_p^{2n+1} W(x, p), \quad (5.7)$$

que l'on peut également écrire

$$\partial_t W(x, p) + \frac{p}{m} \partial_x W(x, p) - \partial_x V(x) \partial_p W(x, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{\hbar^2}{4} \right)^n \frac{\partial_x^{2n+1} V(x)}{(2n+1)!} \partial_p^{2n+1} W(x, p). \quad (5.8)$$

On voit ainsi que l'équation (5.7) constitue l'équation hydrodynamique du modèle de fermions libres. Dans cette équation, le membre de gauche correspond à la partie "classique"

de la dynamique. Le terme  $\frac{p}{m}W(x, p)$  correspond au courant de particules se déplaçant à la vitesse  $p/m$ , tandis que le terme  $-\partial_x V(x)$  est la force exercée par le potentiel sur les particules. Ce dernier terme montre que les particules sont accélérées par le potentiel. En intégrant le membre de gauche de l'équation (5.8) selon  $p$ , nous obtenons

$$\partial_t \int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p) + \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p}{m} W(x, p) - \partial_x V(x) [W(x, p)]_{p=-\infty}^{p=\infty} = \partial_t \rho(x) + \partial_x j(x), \quad (5.9)$$

où nous avons introduit le courant  $j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p}{m} W(x, p)$  associé à la densité locale  $\rho(x)$  et où nous avons supposé l'annulation de la distribution de Wigner sur les bords du domaine. Cette dernière relation correspond à l'équation de conservation de la probabilité de présence de la particule. Le membre de droite, quant à lui, contient des corrections quantiques proportionnelles à la constante de Planck  $\hbar$ . Les effets quantiques apparaissent donc comme des termes correctifs à la dynamique classique. Il est à noter que pour une particule dans un potentiel harmonique  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$  la dynamique de la fonction de Wigner est purement classique.

L'équation (5.8) peut alors être utilisée pour étudier la dynamique d'un gaz de fermions libres en présence d'un potentiel de confinement à l'image de ce que l'on observe dans des expériences d'atomes froids. En particulier, les procédures de quench peuvent être modélisées à l'aide de cette équation.

Pour illustrer ce chapitre, nous proposons de résoudre numériquement l'équation (5.8). Nous ne traitons que la dynamique classique et négligeons les corrections quantiques par souci de simplicité. Prenons un système de  $N$  fermions sans interactions plongés dans un potentiel harmonique  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ . La fonction de Wigner d'un tel système peut s'écrire d'après les références [85, 79]

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k L_k \left( 2 \left( \frac{p^2}{p_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} \right) \right) \exp \left\{ -2 \left( \frac{p^2}{p_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} \right) \right\}, \quad (5.10)$$

où  $L_k(x)$  est le polynôme de Laguerre de degré  $k$ ,  $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$  et  $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$ . L'expression ci-dessus est exacte.

Nous réalisons ensuite un "quench", nous allons induire la dynamique en modifiant brutalement le potentiel initial, soit ici le potentiel harmonique  $V(x)$ . Le système initialement décrit par la fonction de Wigner (5.10) évolue alors en étant soumis à un potentiel que nous avons choisi comme étant  $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + U_0 \exp\{-x^2/\sigma^2\}$ , qui est similaire à celui utilisé dans la référence [7]. Nous ne détaillons pas ici la procédure numérique utilisée pour résoudre la dynamique dans le potentiel  $U(x)$ , elle est identique à celle employée dans le chapitre 7.

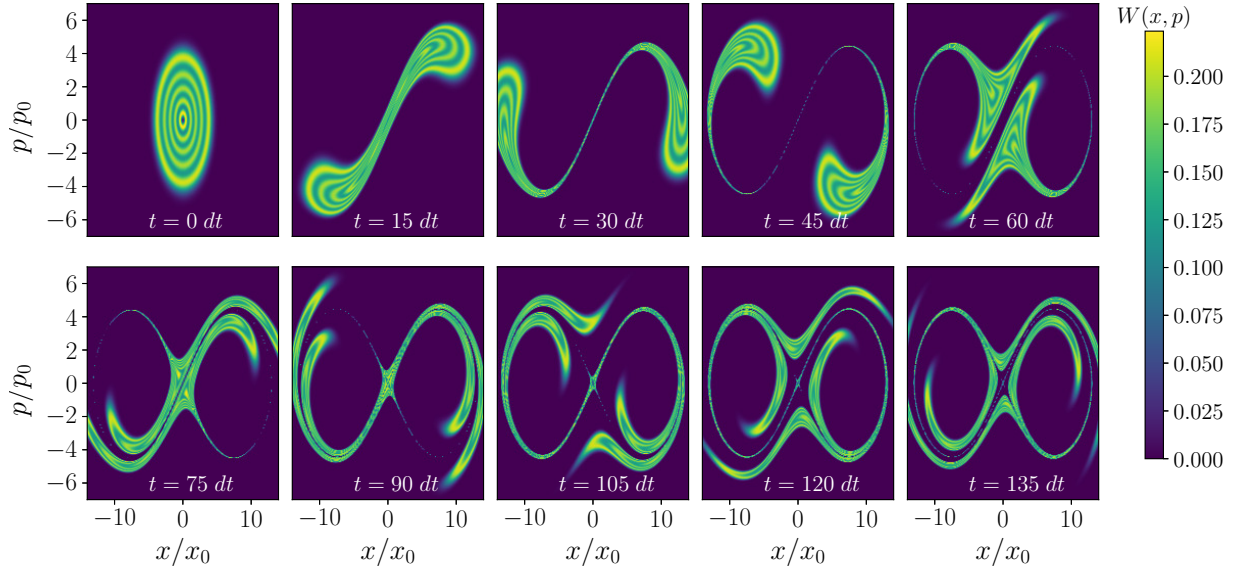


FIGURE 5.1 – Dynamique de la fonction de Wigner d’un système de  $N = 10$  fermions sans interactions initialement plongés dans un potentiel harmonique. Le quench du potentiel harmonique vers le potentiel  $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + U_0 \exp\{-x^2/\sigma^2\}$  est réalisé avec  $\hbar = m = 1$ ,  $\omega = 1/\sqrt{2}$ ,  $dt \sim 0.14/\omega$ ,  $U_0 \simeq 21.2 \hbar\omega$  et  $\sigma \simeq 30 x_0$ .

Sur la figure Fig. (5.1) on observe que la distribution de Wigner présente des oscillations à l’instant initial, qui survivent tout au long de la dynamique. Le potentiel  $U(x)$  a pour effet de séparer la fonction de Wigner en deux lobes distincts piégés dans les minima locaux de ce potentiel. Au cours de la dynamique, une partie de ces lobes est éjectée d’un minimum vers l’autre.

### 5.3 Comparaison avec la GHD

Dans cette section, nous revenons sur la théorie de l’hydrodynamique généralisée (GHD). Cette théorie a été établie en 2016 de manière indépendante par deux équipes distinctes et appliquée au modèle de la chaîne de spins  $XXZ$  [29] et au modèle de Sinh-Gordon [30] dont la limite non-relativiste est équivalente au modèle LL. La GHD permet d’étudier la dynamique hors équilibre de systèmes intégrables et parvient à reproduire avec un accord quasi parfait les observations expérimentales. Dans ce qui suit, nous proposons une courte introduction aux concepts de base de la GHD. Nous choisissons comme support le modèle de Lieb-Liniger et illustrons les principes de la GHD à l’aide de simulations numériques obtenues en utilisant le code IFluid [86]. Dans la limite de Tonks-Girardeau nous montrons l’équivalence entre le formalisme de la distribution de Wigner développée dans la section précédente et la GHD.

Lorsque l’on veut décrire la dynamique d’une assemblée de corpuscules, on peut se placer à une échelle de longueur intermédiaire entre la taille du système  $L$  et la distance entre particules  $d$ . Sur une longueur caractéristique  $l$  telle que  $d \ll l \ll L$ , le système de particules se conçoit alors comme un milieu continu assimilable à un fluide. En divisant notre système en cellules fluides de taille  $l$  et en repérant chaque cellule par les coordonnées spatio-temporelles  $(x, t)$ , on peut définir au sein de ces cellules fluides des grandeurs

physiques locales  $Q(x, t)$ . On fait ensuite l'hypothèse que la portion de fluide contenue dans une cellule relaxe vers un état stationnaire pour des temps suffisamment longs, le reste du fluide agissant comme un bain. Pour décrire cet état stationnaire avec une distribution de probabilité arbitraire, on impose que l'état soit celui qui maximise l'entropie. Dans le cas où l'énergie est conservée, la contrainte de maximisation de l'entropie conduit à une matrice densité de la forme  $\hat{\rho} \propto e^{-\beta(x,t)H(x,t)}$ , avec  $H$  et  $\beta$  respectivement le hamiltonien local et l'inverse de la température locale. Ainsi chaque sous-système est décrit par un ensemble de Gibbs et la valeur moyenne de toute grandeur locale  $Q(x, t)$  est donnée par  $\langle Q(x, t) \rangle = \text{Tr}(Q \hat{\rho})$ .

Pour un système intégrable, nous avons vu dans le chapitre 2, qu'il existe un nombre macroscopique d'intégrales du mouvement. Ce qui signifie qu'on peut se doter d'un jeu de charges  $\{Q\}$  tel que l'ensemble de ces charges commutent entre-elles et avec le hamiltonien du système. Cependant, l'approche mésoscopique dépeinte dans le paragraphe précédent, consistant à étudier le système en le subdivisant en petites répliques de taille  $l$ , ainsi que la contrainte de maximisation de l'entropie au temps long, sont supposées valables dans le cas d'un système intégrable. La conséquence de l'intégrabilité est la relaxation du fluide d'un sous-système vers un ensemble de Gibbs généralisé GGE où la matrice densité est de la forme  $\hat{\rho}_{GGE} \propto e^{\sum_i \beta_i Q_i}$  avec les  $\beta_i$  les "températures généralisées". Par conséquent, la moyenne d'une charge locale quelconque  $Q(x, t)$  s'écrit alors

$$\langle Q(x, t) \rangle = \text{Tr}(Q \hat{\rho}_{GGE}). \quad (5.11)$$

L'objet permettant d'exprimer les moyennes des charges conservées pour un modèle intégrable est la distribution de rapidité  $\rho_p(\lambda)$ , laquelle est à présent une fonction de la position et du temps

$$\langle Q_i(x, t) \rangle = L \int d\lambda f_i(\lambda) \rho_p(x, t, \lambda), \quad (5.12)$$

où les  $f_i \propto \lambda^i$  sont les valeurs propres à une particule. Dans les cas  $i = 0$  et  $i = 2$ , on retrouve respectivement le nombre de particule  $N(x, t) = L \int d\lambda \rho_p(x, t, \lambda)$  et l'énergie totale  $E(x, t) = L \int d\lambda \frac{\lambda^2}{2} \rho_p(x, t, \lambda)$ . On voit alors qu'une charge locale s'exprime par l'intermédiaire d'une densité de charge locale

$$\langle q_i(x, t) \rangle = \int d\lambda f_i(\lambda) \rho_p(x, t, \lambda). \quad (5.13)$$

Une expression similaire peut être écrite pour la densité de courant associée

$$\langle j_i(x, t) \rangle = \int d\lambda f_i(\lambda) v_{\text{eff}}(\lambda) \rho_p(x, t, \lambda), \quad (5.14)$$

où nous avons introduit la vitesse effective  $v_{\text{eff}}(\lambda)$  qui est la vitesse à laquelle se propage une particule sous l'effet des interactions avec les particules environnantes. Cette vitesse effective dépend explicitement de quantités renormalisées par les interactions, on parle de quantités habillées par les interactions. Le processus d'habillage des quantités nues, c'est à dire des quantités calculées dans le modèle de Tonks-Girardeau, se fait par l'équation suivante :

$$f_i(\lambda) = f_i^{dr}(\lambda) - \int \frac{d\lambda'}{\pi} \frac{g}{g^2 + (\lambda - \lambda')^2} \Theta(\lambda, x, t) f_i^{dr}(\lambda') \quad (5.15)$$

où l'indice "dr" renvoie au mot "dressed" soit habillé en français et où nous avons introduit la fonction de remplissage  $\Theta$  qui joue le rôle de la fonction de Wigner dans la théorie de la GHD. Ainsi, la vitesse effective s'écrit  $v_{\text{eff}}(\lambda) = \frac{\partial f_2^{\text{dr}}(\lambda)}{\partial f_1^{\text{dr}}(\lambda)}$ . Les densités de charges (5.13) et de courant associées (5.14) peuvent également s'exprimer en terme de la fonction de remplissage locale  $\Theta(\lambda, x, t) = \frac{\rho_p(\lambda, x, t)}{\rho_s(\lambda, x, t)}$ , où nous avons introduit la densité d'états  $\rho_s(\lambda, x, t)$  qui représente le nombre d'états pouvant être occupés et qui se réduit à la densité de rapidités à température nulle. Les valeurs moyennes des densités de charges et de courants associées s'expriment alors par

$$\langle q_i(x, t) \rangle = \int \frac{d\lambda}{2\pi} \Theta(\lambda, x, t) f_i^{\text{dr}}(\lambda) \quad \langle j_i(x, t) \rangle = \int \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{\hbar\lambda}{m} \Theta(\lambda, x, t) f_i^{\text{dr}}(\lambda). \quad (5.16)$$

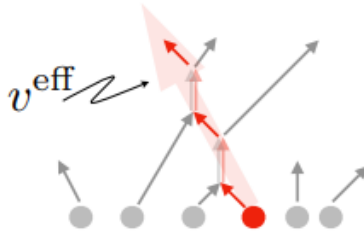


FIGURE 5.2 – Représentation de la vitesse effective, tirée du cours [6] de B. Doyon. La vitesse effective est la résultante de l'ensemble des collisions entre une particule et les  $N - 1$  autres.

Comme chaque cellule fluide est décrite par un état stationnaire, le flux de densité de charge entrant dans la cellule est compensé par le flux de densité de charge sortant, ce qui se formalise par l'équation de continuité  $\partial_t \langle q_i(x, t) \rangle + \partial_x \langle j_i(x, t) \rangle = 0$ . En y injectant les relations (5.13) et (5.14) on obtient l'équation

$$\partial_t \rho_p(\lambda, x, t) + \partial_x (v_{\text{eff}}(\lambda) \rho_p(\lambda, x, t)) = 0. \quad (5.17)$$

L'équation régissant l'évolution de la densité de particule dans l'espace des phases s'exprime, quant à elle, par

$$\partial_t \Theta(\lambda, x, t) + v_{\text{eff}}(\lambda) \partial_x \Theta(\lambda, x, t) = 0, \quad (5.18)$$

cette équation capture l'ensemble du comportement à grande distance du fluide. Dans le cas d'un système inhomogène, les équations précédentes gagnent un terme supplémentaire et on retrouve alors une équation du type (5.8). Le fait que la vitesse effective contient des quantités habillées rend difficile la résolution purement analytique d'une telle équation. En revanche, il est possible de résoudre numériquement ce type d'équation en utilisant la méthode des éléments finis ou la méthode des caractéristiques. Cette dernière méthode est celle utilisée dans le code IFluid [86], spécialement développé pour résoudre les équations de la GHD de plusieurs modèles intégrables. Pour faire le lien avec la fonction de Wigner d'un système de  $N$  fermions sans interactions dans un piège harmonique à  $T = 0$ , nous utilisons ici la limite de Tonks-Girardeau du modèle de Lieb-Liniger. Comme dans la section précédente, nous reprenons la situation de la référence [7], mais cette fois nous ne

réalisons pas une procédure de quench et appliquons exactement la même démarche que dans cette référence. Ainsi, nous considérons la dynamique du système de bosons de cœur dur piégés dans un potentiel harmonique  $V(x)$  sous l'effet d'un potentiel dépendant du temps  $U(x, t) = \left( V(x) + U_0 \sin\left(\frac{\pi t}{2t_0}\right) \exp\{-x^2/\sigma^2\} \right) \theta_H(t_0 - t)$ . Initialement, le système est décrit par un état thermique  $(1 + \exp\{(e(k) - \mu_{\text{eff}})/T\})^{-1}$  où  $e(k)$  est l'énergie cinétique à une particule et  $\mu_{\text{eff}} = \mu - V(x)$  est le potentiel chimique effectif issu de l'approximation de densité locale. Au cours du temps, ce potentiel va séparer le système en deux lobes de manière similaire à ce que l'on peut voir sur la figure Fig. (5.1), puis lorsque  $t > t_0$  le potentiel est éteint et les deux lobes sont libres de s'étendre dans l'espace des phases. Cette situation est illustrée dans les figures Fig. (5.3) et Fig. (5.4), qui est l'analogie de celle obtenue dans la référence [7].

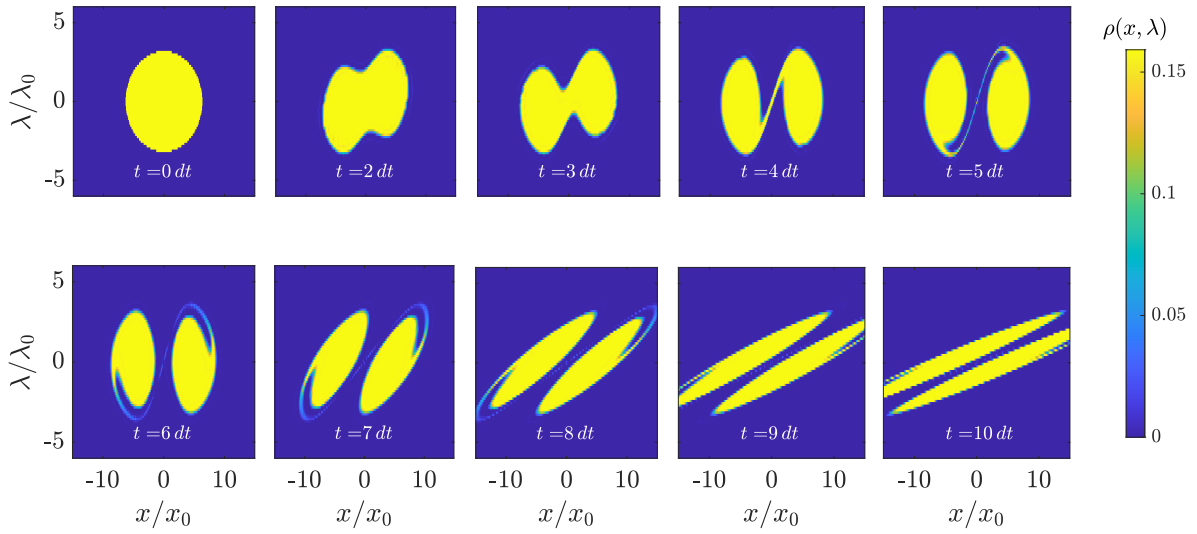


FIGURE 5.3 – Dynamique de la distribution  $\rho(\lambda, x)$  pour un système de  $N = 10$  bosons de cœur dur ( $\gamma = 10^{10}$ ) initialement plongés dans un potentiel harmonique. L'évolution temporelle est obtenue par la résolution des équations de la GHD avec un potentiel dépendant du temps  $U(x, t < t_0) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + U_0 \sin\left(\frac{\pi t}{2t_0}\right) \exp\{-x^2/\sigma^2\}$ . Les paramètres de la simulation sont  $\hbar = m = 1$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $dt = 0.025/\omega$ ,  $U_0 = 20\hbar\omega$ ,  $\sigma = 3x_0$  et  $\lambda_0 = \sqrt{\hbar m \omega}$ . Pour  $t > t_0$ , le potentiel  $U(x, t)$  est éteint et l'évolution du système est libre.

Comme on peut le constater sur la figure Fig. (5.3), la dynamique obtenue en résolvant les équations de la GHD est similaire à celle donnée par l'équation d'évolution de la distribution de Wigner. La seule différence étant que le potentiel  $U$  utilisé ici est dépendant du temps et qu'il s'annule au bout d'un temps  $t = t_0$ . La conséquence est que la distribution évolue alors dans l'espace des phases sans potentiel, ce qui est visible à partir de  $t = 7 dt$ . Notons également que la distribution à l'instant initial ne présente pas d'oscillations et est construite comme étant constante tant que  $\mu - U(x, 0) > 0$ .

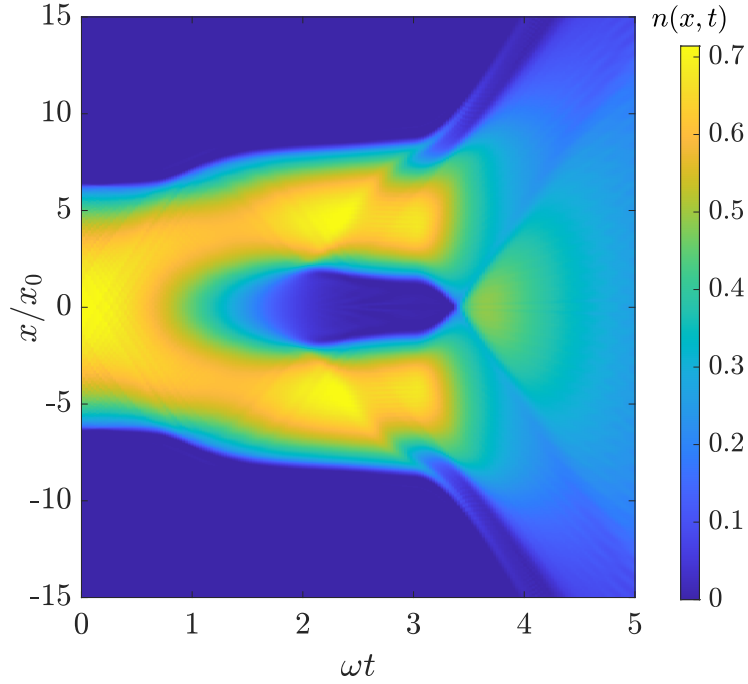


FIGURE 5.4 – Evolution temporelle de la densité moyenne de particule  $n(x, t)$  dans le plan  $(x, t)$ . Le potentiel considéré ici dépend du temps  $U(x, t < t_0) = m\omega^2 x^2/2 + U_0 \sin\left(\frac{\pi t}{2t_0}\right) \exp\{-x^2/\sigma^2\}$  et identique à celui utilisé dans l'article [7]. Les paramètres sont fixés à  $\omega = 0.5$ ,  $\omega t_0 = 3$ ,  $U_0 = 20 \hbar\omega$  et  $\sigma = 3\sqrt{\hbar/m\omega}$ , avec  $\hbar = m = 1$ . Le paramètre de Lieb vaut  $\gamma = 10^{10}$ . Au delà de  $t = t_0$  le potentiel est éteint et le système évolue librement.

Dans la figure Fig. (5.4), nous représentons la densité de particule  $n(x, t)$  dans le plan  $(x, t)$ . La quantité  $n(x, t)$  est calculée en intégrant sur  $k$  la distribution  $\rho(x, k, t)$ . Le potentiel  $U(x, t)$  est arrêté à  $\omega t = 3$  laissant le système évoluer librement. Sur la figure ci-dessus, on observe, après cette phase d'expansion, une recombinaison partielle des deux lobes au centre piège. Cette recombinaison n'est pas accompagnée de franges d'interférences, ce qui est attendu pour des fermions libres. Notre simulation numérique conduit donc bien à la même conclusion que Girardeau et Wright [7].

Que ce soit par l'intermédiaire de la fonction de Wigner ou par les équations de la GHD, nous disposons d'un formalisme puissant permettant de simuler numériquement des situations physiques réalisables expérimentalement. Dans la dernière section du chapitre 7, nous utilisons l'équation d'évolution de la fonction de Wigner pour résoudre de manière numérique la dynamique d'un gaz de bosons de cœur dur piégé dans un potentiel harmonique et soumis à des pertes atomiques.

## Deuxième partie

### Résultats



# Chapitre 6

## Au delà de l'approximation de la densité locale

Ce chapitre est consacré à l'étude du gaz de Bose unidimensionnel soumis à un potentiel de piégeage. En pratique lorsque l'on veut étudier les propriétés d'un gaz d'atomes ultra froids, on a besoin de confiner le gaz à l'aide de dispositifs optiques et magnétiques. De ce fait, on ne peut plus utiliser le hamiltonien (2.1) pour décrire le système, il faut tenir compte du potentiel  $V(x)$  dans lequel est plongé le système. En effet, la présence de ce potentiel de piégeage rend le gaz inhomogène, les propriétés physiques du système ne sont plus identiques en tout point  $x$ , mais dépendent de la valeur de  $V(x)$ . A ce jour, il n'existe pas de théorie permettant de décrire de manière générale un système inhomogène. En revanche, il est possible d'obtenir une bonne approximation de l'état fondamental du système inhomogène en utilisant une approche empruntée à la statique des fluides. Cette approche s'appelle l'approximation de densité locale (LDA) [56, 57, 66, 58, 87] et est couramment utilisée pour modéliser les propriétés des systèmes inhomogènes. Par exemple, la description de la densité locale du système inhomogène se fait par l'intermédiaire de la LDA. Toutefois, l'approche que nous proposons ici nous permet de donner une interprétation différente de la LDA et même d'aller plus loin que la LDA conventionnelle. En effet, en écrivant la densité locale comme une fonctionnelle du potentiel de confinement et en admettant que la fonctionnelle puisse être développée en gradient du potentiel, nous montrons que la LDA constitue l'ordre zéro du développement et que les termes d'ordre supérieur sont des corrections que l'on peut calculer. La première section (6.1) de ce chapitre présente la méthode générale pour déterminer les premiers termes correctifs de la LDA en utilisant la théorie de la réponse linéaire et non linéaire. La seconde section (6.2) met en application les concepts développés dans la section précédente pour le gaz de Tonks-Girardeau. Les corrections à la LDA y sont calculées analytiquement. La troisième section (6.3) montre le calcul analytique des termes correctifs dans la limite de Gross-Pitaevskii. La section (6.4) est dédiée à la présentation de la méthode numérique utilisée pour déterminer les corrections dans un régime d'interaction intermédiaire. Nous montrons également que notre méthode redonne bien les résultats analytiques.

### 6.1 Corrections à la LDA : principe de la méthode

Dans cette section, nous détaillons une méthode permettant de mesurer l'effet d'un potentiel de confinement sur la densité du gaz d'atomes froids. On suppose que l'on peut modéliser les effets du potentiel en considérant la densité  $\langle \rho(x) \rangle$  comme une fonctionnelle

locale du potentiel de piégeage  $\langle \rho(x) \rangle = \mathcal{F}[V](x)$ . On entend par fonctionnelle locale que la densité  $\langle \rho(x) \rangle$  dépend de la valeur du potentiel  $V$  en un point  $y$  situé dans le voisinage du point  $x$ . Cette fonctionnelle locale dépend du potentiel de piégeage mais aussi de ses dérivées et on fait l'hypothèse que l'on peut développer cette fonctionnelle en gradient du potentiel

$$\begin{aligned} \langle \rho(x) \rangle &\simeq \rho_{\text{LDA}}(V(x)) + A(V(x)) \frac{dV(x)}{dx} \\ &\quad + B(V(x)) \frac{d^2V(x)}{dx^2} + C(V(x)) \left( \frac{dV(x)}{dx} \right)^2 \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (6.1)$$

À l'ordre le plus bas, la densité locale est celle prédite par la LDA standard. Les ordres supérieurs constituent des corrections à la LDA et dans la suite nous nous limiterons à l'ordre deux. Les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne dépendent que de la valeur du potentiel de piégeage au point  $x$  et l'objectif est donc de déterminer ces coefficients.

On sait que les propriétés physiques du gaz de Bose homogène restent inchangées après avoir appliqué une réflexion spatiale ( $x \rightarrow -x$ ), on en déduit alors que le coefficient  $A$  doit être nul pour respecter la symétrie de réflexion.

Les premières corrections non nulles à la LDA sont du second ordre et montrent comment la densité locale est modifiée avec la courbure du potentiel, soit le coefficient  $B$  et la pente du potentiel, soit le coefficient  $C$ . Par analyse dimensionnelle, les coefficients  $B$  et  $C$  doivent avoir la forme suivante

$$B(V) = -\frac{\alpha(\gamma)}{\rho_{\text{LDA}}^3(V)}, \quad C(V) = -\frac{\beta(\gamma)}{\rho_{\text{LDA}}^5(V)}, \quad (6.2)$$

où les fonctions  $\alpha(\gamma)$  et  $\beta(\gamma)$  sont sans dimension et dépendent du paramètre de Lieb, qui dans le cas du gaz de Bose inhomogène, dépend de la position  $\gamma(x) = \frac{g}{\rho_{\text{LDA}}(V(x))}$ . Ces deux fonctions sont les quantités centrales de cette étude.

On suppose que le système est soumis à un potentiel dont les variations locales sont lentes  $V(x) = V_0 + \delta V(x)$ , avec  $V_0$  une constante. En revanche, à l'échelle du système les variations du potentiel peuvent être rapides. En injectant cette expression dans la relation (6.1) on obtient au second ordre en  $\delta V(x)$

$$\begin{aligned} \langle \rho(x) \rangle &= \rho_{\text{LDA}}(V_0) + B(V_0) \frac{d^2\delta V(x)}{dx^2} + C(V_0) \left( \frac{d\delta V(x)}{dx} \right)^2 \\ &\quad + \left( \frac{d\rho_{\text{LDA}}}{dV} \Big|_{V_0} + \frac{dB}{dV} \Big|_{V_0} \frac{d^2\delta V(x)}{dx^2} \right) \delta V(x) + \frac{\delta V(x)^2}{2} \frac{d^2\rho_{\text{LDA}}}{dV^2} \Big|_{V_0}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

On détermine les coefficients  $B$  et  $C$  en les identifiant à d'autres coefficients obtenus par la théorie de la réponse. Pour ce faire, on part du système homogène (sans potentiel) auquel on ajoute un petit potentiel  $\delta V(x)$  que l'on traite en perturbation sur les états propres du modèle LL.

Soient  $|0\rangle$  l'état fondamental du hamiltonien (2.1) et  $|n\rangle$  un état excité, la densité locale  $\langle \rho(x) \rangle$  s'écrit au second ordre en perturbation

$$\langle \rho(x) \rangle = \rho_0 + \int_0^L dy \chi(x, y) \delta V(y) + \int_0^L \int_0^L dy dz \phi(x, y, z) \delta V(y) \delta V(z) + O(\delta V^3), \quad (6.4)$$

où on a introduit les deux quantités fondamentales du problème, la susceptibilité linéaire  $\chi(x, y)$  et la susceptibilité non-linéaire  $\phi(x, y, z)$ . La susceptibilité linéaire mesure la réponse du système au point  $x$  suite à une perturbation localisée en  $y$ . La susceptibilité non-linéaire joue un rôle analogue et mesure la réponse du système ayant subi une perturbation en  $y$  et  $z$ .

La susceptibilité linéaire  $\chi(x, y)$  s'écrit explicitement

$$\chi(x, y) = \sum_{n \neq 0} \frac{\langle 0 | \rho(x) | n \rangle \langle n | \rho(y) | 0 \rangle}{E_0 - E_n} + \frac{\langle 0 | \rho(y) | n \rangle \langle n | \rho(x) | 0 \rangle}{E_0 - E_n}, \quad (6.5)$$

avec une somme sur tous les états excités du système  $|n\rangle$ . La susceptibilité non-linéaire a une forme plus complexe

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2} \sum'_{n,m} \frac{\langle m | \rho(x) | n \rangle \langle n | \rho(y) | 0 \rangle \langle 0 | \rho(z) | m \rangle}{(E_0 - E_n)(E_0 - E_m)} + \text{perm.}(x, y, z), \quad (6.6)$$

ici la somme  $\sum'_{n,m}$  est prise sur des états  $n$  et  $m$  avec la contrainte suivante :  $n \neq 0$ ,  $m \neq 0$  et  $n \neq m$ . La fonction  $\text{perm.}(x, y, z)$  contient les cinq autres contributions engendrées par la permutation des positions  $(x, y, z)$ .

Le modèle LL étant invariant par translation, il est plus facile d'exprimer les deux susceptibilités dans l'espace de Fourier. En effet, la réponse mesurée en  $x$  du fait de la perturbation en  $y$  reste inchangée si on applique la même translation aux points  $x$  et  $y$ . Il en résulte alors que la susceptibilité linéaire n'est en réalité qu'une fonction de la distance relative  $|x - y|$ ,  $\chi(x, y) = \chi(x - y)$  et que la susceptibilité non-linéaire ne dépend que de deux variables  $\phi(x, y, z) = \phi(x - y, x - z)$ . En définissant les modes de Fourier de l'opérateur densité comme  $\rho(x) = \frac{1}{L} \sum_q e^{-iqx} \tilde{\rho}_q$  avec  $q \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$ , la susceptibilité linéaire devient dans l'espace de Fourier

$$\tilde{\chi}(q) = \int_0^L e^{iqu} \chi(u) du = \frac{2}{L} \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle n | \tilde{\rho}_q | 0 \rangle|^2}{E_0 - E_n} \quad (6.7)$$

et la susceptibilité non-linéaire prend la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(q_1, q_2) &= \int_0^L \int_0^L dudv e^{iq_1u} e^{iq_2v} \phi(u, v) \\ &= \frac{1}{2L} \left( \sum'_{n,m} \frac{\langle m | \tilde{\rho}_{-q_3} | n \rangle \langle n | \tilde{\rho}_{-q_1} | 0 \rangle \langle 0 | \tilde{\rho}_{-q_2} | m \rangle}{(E_0 - E_n)(E_0 - E_m)} + \text{perm.}(q_1, q_2, q_3) \right), \end{aligned} \quad (6.8)$$

où  $q_3 = -q_1 - q_2$  et la fonction  $\text{perm.}(q_1, q_2, q_3)$  prend en compte les autres termes issus de la permutation des trois modes  $(q_1, q_2, q_3)$ .

Les deux prochaines sections détaillent la stratégie utilisée pour extraire les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  des susceptibilités linéaires et non-linéaires.

### 6.1.1 Identification du coefficient $\alpha(\gamma)$

Pour déterminer le coefficient  $\alpha$ , il suffit de ne considérer que la susceptibilité linéaire  $\tilde{\chi}(q)$ . Plus précisément, comme le potentiel est supposé varier sur de grandes longueurs d'ondes, seuls les états ayant une impulsion  $q$  proche de zéro sont sensibles à ce potentiel.

Ainsi, la susceptibilité linéaire est essentiellement gouvernée par son comportement à faibles modes  $q$  et admet le développement suivant

$$\tilde{\chi}(q) = \tilde{\chi}(0) + \left. \frac{\partial^2 \tilde{\chi}(q)}{\partial q^2} \right|_{q=0} \frac{q^2}{2} + O(q^4), \quad (6.9)$$

dans lequel le premier ordre est nul grâce à la propriété  $\tilde{\chi}(q) = \tilde{\chi}(-q)$ . Le terme  $\tilde{\chi}(0)$  est la compressibilité du système homogène définie comme la dérivée de la densité par le potentiel chimique.

Dans l'espace de Fourier, le premier ordre de la relation (6.4) s'écrit simplement

$$\int_0^L dx e^{iqx} \int_0^L dy \chi(x-y) \delta V(y) = \tilde{\chi}(q) \delta \tilde{V}_q, \quad (6.10)$$

avec  $\delta \tilde{V}_q$  la transformée de Fourier du potentiel  $\delta V$ . En injectant le développement (6.9) dans la formule ci-dessus et en appliquant une transformée de Fourier inverse, la densité locale prend la forme suivante

$$\langle \rho(x) \rangle = \rho_0 + \tilde{\chi}(0) \delta V(x) - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \tilde{\chi}(q)}{\partial q^2} \right|_{q=0} \partial_x^2 \delta V(x) + O(\delta V(x))^2. \quad (6.11)$$

En comparant les relations (6.3) et (6.11), on peut identifier les deux premiers termes de (6.11) à  $\rho_{\text{LDA}}(V_0 + \delta V(x))$  et le dernier terme s'identifie alors à la quantité  $B(V(x)) \partial_x^2 V(x) = -\frac{\alpha(\gamma)}{\rho_{\text{LDA}}^3(x)} \partial_x^2 V(x)$ , au premier ordre en  $\delta V(x)$ . Par conséquent, il est possible d'exprimer le coefficient  $\alpha$  comme

$$\alpha = \frac{\rho_0^3}{2} \left. \frac{\partial^2 \tilde{\chi}(q)}{\partial q^2} \right|_{q=0}, \quad (6.12)$$

où le signe moins introduit dans la définition (6.2) compense celui de la relation (6.11). C'est l'un des résultats les plus importants de cette étude car il établit une relation entre le coefficient  $\alpha$  et la quantité régissant la réponse linéaire du système  $\tilde{\chi}(q)$ .

Il convient de préciser ici que le coefficient  $\alpha$  ne dépend que du paramètre  $\gamma$ . En effet, par analyse dimensionnelle la susceptibilité linéaire peut s'écrire comme  $\tilde{\chi}(q) = \tilde{\chi} = f(\gamma, q/\rho_0)/\rho_0$  avec  $f(\gamma, q/\rho_0)$  une fonction adimensionnée.

### 6.1.2 Identification du coefficient $\beta$

Dans cette section nous reprenons la méthode développée dans la section précédente. Toutefois, le coefficient  $\beta$  ne peut être calculé qu'en étendant la théorie de la réponse jusqu'au second ordre, c'est-à-dire utiliser la théorie de la réponse non-linéaire. La susceptibilité non-linéaire est majoritairement dominée par son comportement autour de  $(q_1, q_2) \rightarrow (0, 0)$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(q_1, q_2) &= \tilde{\phi}(0, 0) + q_1 \partial_{q_1} \tilde{\phi}(0, 0) + q_2 \partial_{q_2} \tilde{\phi}(0, 0) + q_1 q_2 \partial_{q_1} \partial_{q_2} \tilde{\phi}(0, 0) + \frac{q_1^2}{2} \partial_{q_1}^2 \tilde{\phi}(0, 0) \\ &+ \frac{q_2^2}{2} \partial_{q_2}^2 \tilde{\phi}(0, 0) + O(q_1^3). \end{aligned} \quad (6.13)$$

La symétrie de réflexion implique que les termes contenant des dérivées premières sont nuls. Il ne reste alors que les termes d'ordre deux dans le développement précédent.

De la même manière que pour le coefficient  $\alpha$ , on peut écrire la transformée de Fourier de la densité locale au second ordre comme

$$\int_0^L dx e^{iqx} \int_0^L \int_0^L dy dz \phi(x-y, x-z) \delta V(y) \delta V(z) = \frac{1}{L} \sum_{q, q_1, q_2} \delta_{q, q_1 + q_2} \tilde{\phi}(q_1, q_2) \delta \tilde{V}_{q_1} \delta \tilde{V}_{q_2}. \quad (6.14)$$

En remplaçant  $\tilde{\phi}(q_1, q_2)$  par son expression (6.13) et en repassant dans l'espace des positions, on aboutit à la relation

$$\int_0^L \int_0^L dy dz \delta V(y) \delta V(z) \phi(x-y, x-z) = \phi_{00} \delta V(x)^2 - \phi_{11} \left( \frac{d\delta V(x)}{dx} \right)^2 - \phi_{22} \frac{d^2 \delta V(x)}{dx^2} \delta V(x), \quad (6.15)$$

avec les coefficients  $\phi_{00} = \tilde{\phi}(0, 0)$ ,  $\phi_{11} = \partial_{q_1} \partial_{q_2} \tilde{\phi}(0, 0)$  et  $\phi_{22} = \partial_{q_1}^2 \tilde{\phi}(0, 0) + \partial_{q_2}^2 \tilde{\phi}(0, 0)$ .

L'identification avec (6.3) montre que le premier terme du membre de droite de (6.15) est lui aussi contenu dans  $\rho_{\text{LDA}}(V_0 + \delta V(x))$ , il est une correction d'ordre supérieur au terme proportionnel à la compressibilité comme relaté dans la section précédente. Le second terme dans l'équation (6.3) s'identifie avec  $C(V(x)) = -\frac{\beta(\gamma)}{\rho_{\text{LDA}}^5(x)}$ , quant au dernier terme il constitue une correction sous-dominante au terme de courbure,  $\phi_{22} = \frac{\partial B}{\partial V} \Big|_{V_0}$ .

Le coefficient  $\beta$  s'écrit alors

$$\beta = \rho_0^5 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(q_1, q_2)}{\partial q_1 \partial q_2} \Big|_{\substack{q_1=0 \\ q_2=0}} \quad (6.16)$$

et dépend explicitement de  $\gamma$  en reprenant l'argument utilisé pour  $\alpha$ , soit  $\tilde{\phi}(q_1, q_2) = f(\gamma, q_1/\rho_0, q_2/\rho_0)/\rho_0^3$ . Ce résultat est l'un des principaux de ce travail.

## 6.2 Limite de Tonks-Girardeau

Cette section est dédiée à l'étude de la susceptibilité linéaire dans la limite  $\gamma \rightarrow \infty$ . Dans ce régime la densité locale s'exprime à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation fermionique  $\rho(x) = c^\dagger(x)c(x)$ . Le passage des opérateurs bosoniques  $\Psi(x)$  aux opérateurs fermioniques  $c(x)$  est assuré par la transformation de Jordan-Wigner

$$\Psi(x) = e^{-i\pi \int dz c^\dagger c} c(x), \quad (6.17)$$

où  $c(x)$  and  $c^\dagger(x)$  satisfont les relations d'anti-commutation usuelles  $\{c(x), c^\dagger(y)\} = \delta(x-y)$ . Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 2, l'état fondamental du système est une mer de Dirac où les impulsions  $k$  sont comprises dans l'intervalle  $[-k_F, k_F]$ , avec  $k_F = \pi\rho_0$  l'impulsion au niveau de Fermi. Ainsi, lorsque on agit sur le fondamental avec les opérateurs de création et de destruction fermioniques, on obtient respectivement :  $c_k^\dagger |0\rangle = 0$  si  $|k| < k_F$  et  $c_k |0\rangle = 0$  si  $|k| > k_F$ , où nous avons introduit les modes de Fourier définis par  $c(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{ikx} c_k$ . Dans l'espace de Fourier, la densité locale s'écrit alors

$$\tilde{\rho}_q = \int_0^L dx e^{iqx} \rho(x) = \sum_k c_k^\dagger c_{k-q}. \quad (6.18)$$

### 6.2.1 Cas du coefficient $\alpha$

En injectant la relation (6.18) dans (6.7), on constate que l'état excité  $|n\rangle$  apparaissant dans l'élément de matrice  $\langle n | c_k^\dagger c_{k-q} | 0 \rangle$  est forcément donné par  $|n\rangle = c_k^\dagger c_{k-q} | 0 \rangle$ , sans quoi l'élément de matrice serait nul. La somme sur tous les états propres du modèle de Lieb-Liniger se réduit donc à une somme sur les états excités correspondant à une excitation de paire particule-trou au dessus du fondamental. Dans la limite de Tonks-Girardeau, l'énergie d'un état à une paire particule-trou peut se construire à partir de l'énergie du fondamental. En effet, en créant un trou dans la mer de Dirac avec une impulsion  $-k+q$  l'énergie du fondamental perd une quantité  $\frac{\hbar^2(k-q)^2}{2m}$  et en créant une particule d'impulsion  $k$  au dessus du niveau de Fermi le fondamental gagne une énergie  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ , l'énergie d'un état excité s'écrit alors  $E_n = E_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2(k-q)^2}{2m}$ . On a donc  $\langle n | c_k^\dagger c_{k-q} | 0 \rangle = 1$  si  $|k-q| < k_F$  et  $|k| > k_F$ , soit dans le cas  $q > 0$ , si  $k_F < k < k_F + q$ . Pour  $q > 0$ , la susceptibilité linéaire est donnée par

$$\tilde{\chi}(q) = \frac{2}{L} \int_{k_F}^{k_F+q} L dk \frac{1}{2\pi \left( -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2(k-q)^2}{2m} \right)},$$

où la somme est devenue une intégrale sur  $k$  en passant à la limite thermodynamique. Pour des modes  $q$  faibles les états excités entrant en jeu dans le calcul de  $\tilde{\chi}$  sont ceux pour lesquels une particule proche du niveau de Fermi est excitée au dessus de celui-ci. Dans le cas  $q < 0$  on trouve une expression similaire et dans un cas comme dans l'autre, la résolution de l'intégrale donne

$$\tilde{\chi}(q) = -\frac{m}{\hbar^2 q \pi} \ln \left| \frac{1 + \frac{q}{2\pi\rho_0}}{1 - \frac{q}{2\pi\rho_0}} \right| \underset{q \rightarrow 0}{\simeq} -\frac{m}{\hbar^2 \rho_0 \pi^2} - \frac{m}{6\hbar^2 \pi^4 \rho_0^3} \frac{q^2}{2} + O(q^4). \quad (6.19)$$

En utilisant la relation (6.12) on peut identifier le coefficient  $\alpha(\gamma)$  comme

$$\alpha_{\text{TG}} = \alpha(\gamma \rightarrow \infty) = -\frac{1}{12 \pi^4}. \quad (6.20)$$

Ainsi, dans la limite de Tonks-Girardeau, le coefficient  $\alpha$  est une constante négative. Ceci indique que pour un potentiel de piégeage harmonique la correction apportée à la LDA fait augmenter la densité au centre du piège.

### 6.2.2 Cas du coefficient $\beta$

Le calcul de la fonction  $\beta$  dans le régime de Tonks-Girardeau est analogue à celui permettant d'obtenir  $\alpha$ . A l'aide de la relation (6.18), la transformée de Fourier de la susceptibilité non linéaire (6.8) peut s'exprimer en termes d'opérateurs de création et de destruction de fermions. Le premier terme de (6.8) peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} & \sum'_{n,m} \frac{\langle m | \tilde{\rho}_{-q_3} | n \rangle \langle n | \tilde{\rho}_{-q_1} | 0 \rangle \langle 0 | \tilde{\rho}_{-q_2} | m \rangle}{(E_0 - E_n)(E_0 - E_m)} \\ &= \sum'_{n,m} \sum_{k,l,p} \frac{\langle m | c_p^\dagger c_{p+q_3} | n \rangle \langle n | c_k^\dagger c_{k+q_1} | 0 \rangle \langle 0 | c_l^\dagger c_{l+q_2} | m \rangle}{(E_0 - E_n)(E_0 - E_m)}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Il n'est pas nécessaire d'étudier les six termes présents dans (6.8) car ils peuvent tous se déduire de celui indiqué ci-dessus par permutation des indices  $(q_1, q_2, q_3)$ . C'est la raison

pour laquelle nous nous limitons ici au traitement du terme (6.21). Dans ce dernier, il est important de remarquer que les deux éléments de matrices faisant intervenir l'état fondamental  $|0\rangle$  fixe les états  $|n\rangle = c_k^\dagger c_{k+q_1} |0\rangle$  et  $|m\rangle = c_{l+q_2}^\dagger c_l |0\rangle$ . Ainsi le terme (6.21) devient

$$\sum'_{n,m} \frac{\langle m | \tilde{\rho}_{-q_3} | n \rangle \langle n | \tilde{\rho}_{-q_1} | 0 \rangle \langle 0 | \tilde{\rho}_{-q_2} | m \rangle}{(E_0 - E_n)(E_0 - E_m)} = \frac{4m^2}{\hbar^4} \sum_{k,l,p} \frac{\langle 0 | c_l^\dagger c_{l+q_2} c_p^\dagger c_{p+q_3} c_k^\dagger c_{k+q_1} | 0 \rangle}{(k^2 - (k+q_1)^2)((l+q_2)^2 - l^2)}. \quad (6.22)$$

Comme l'état fondamental est une mer de Dirac et d'après la définition des états  $|n\rangle$  et  $|m\rangle$ , les modes  $k$  et  $l$  n'existent que sur des domaines définis par :  $-k_F - q_1 < k < k_F - q_1$  et  $-k_F < l < k_F$ . En tenant compte de ces restrictions sur  $k$  et  $l$ , le théorème de Wick ne donne finalement que deux contractions non nulles

$$-\frac{4m^2}{\hbar^4 q_1 q_2} \sum_{k,l,p} \frac{\langle c_l^\dagger c_{k+q_1} \rangle \langle c_{l+q_2} c_p^\dagger \rangle \langle c_{p+q_3} c_k^\dagger \rangle}{(2k+q_1)(2l+q_2)} - \frac{\langle c_l^\dagger c_{p+q_3} \rangle \langle c_{l+q_2} c_k^\dagger \rangle \langle c_p^\dagger c_{k+q_1} \rangle}{(2k+q_1)(2l+q_2)}, \quad (6.23)$$

où nous avons introduit la notation  $\langle \dots \rangle = \langle 0 | \dots | 0 \rangle$  par soucis de clarté. Ici les éléments de matrice imposent des conditions permettant d'exprimer un indice  $k, l$  ou  $p$  en fonction des autres indices et des modes de Fourier  $q_3, q_1$  et  $q_2$ . Par exemple, l'élément de matrice  $\langle c_{l+q_2} c_p^\dagger \rangle = \delta_{p, l+q_2}$  permet d'écrire  $p = l + q_2$ , l'élément de matrice  $\langle c_{p+q_3} c_k^\dagger \rangle = \delta_{k, p+q_3}$  donne alors  $k = l + q_2 + q_3$ . Enfin, l'élément de matrice  $\langle c_l^\dagger c_{k+q_1} \rangle = \delta_{l, k+q_1}$  conduit à la condition, commune aux deux contractions de Wick (6.23),  $q_3 = -(q_1 + q_2)$ . En principe, pour évaluer la somme présente dans (6.23), il faut tenir compte de tous les cas possibles pour lesquels la condition  $q_3 = -(q_1 + q_2)$  est vérifiée, cela revient à examiner le signe de chacun des modes  $(q_1, q_2, q_3)$ . Nous ne revenons pas ici sur le traitement complet de chacun des cas, mais nous laissons les lecteurs consulter l'appendice dédié. Un fois le signe des modes  $q_1, q_2, q_3$  fixé et après avoir exprimé deux indices au choix parmi  $k, l, p$  en fonction d'un seul, on peut transformer la somme dans (6.23) en intégrale dont le domaine d'intégration est obtenu par la réunion des domaines d'existences de l'indice choisi, domaines déterminés par les éléments de matrice.

Ceci fait et en ajoutant les contributions des six permutations d'indice, la fonction  $\tilde{\phi}(q_1, q_2)$  se lit dans la limite de Tonks-Girardeau

$$\tilde{\phi}(q_1, q_2) = \frac{2m^2}{\hbar^4 \pi (q_1 + q_2) q_1 q_2} \ln \left( \frac{2k_F + q_1}{2k_F - q_1} \frac{2k_F + q_2}{2k_F - q_2} \frac{2k_F - (q_1 + q_2)}{2k_F + (q_1 + q_2)} \right). \quad (6.24)$$

Outre la surprenante simplicité du résultat ci-dessus, il possède les propriétés de symétries suivante :  $\tilde{\phi}(q_1, q_2) = \tilde{\phi}(q_2, q_1)$  et  $\tilde{\phi}(q_1, q_2) = \tilde{\phi}(-q_1, -q_2)$ .

Le développement de Taylor autour de  $(k, k') \rightarrow (0, 0)$  conduit à

$$\tilde{\phi}(q_1, q_2) \simeq -\frac{m^2}{2\hbar^4} \left( \frac{1}{\pi^4 \rho_0^3} + \frac{q_1^2 + q_2^2}{4\pi^6 \rho_0^5} + \frac{q_1 q_2}{4\pi^6 \rho_0^5} \right), \quad (6.25)$$

d'où l'identification du coefficient  $\beta$

$$\beta_{\text{TG}} = \beta(\gamma \rightarrow \infty) = -\frac{1}{8\pi^6}. \quad (6.26)$$

Il est à noter que le coefficient  $\beta$  est une constante négative dans ce régime, tout comme le coefficient  $\alpha$ .

Les résultats (6.20) et (6.26) présentés dans ce manuscrit ont également été obtenus par Samaj et Percus [88]. Dans leur article, les auteurs étudient la densité locale d'un gaz de fermions libres et parviennent à développer cette densité locale grâce à une méthode récursive. Les premiers coefficients apparaissant dans leur développement correspondent aux nôtres.

## 6.3 Limite de Gross-Pitaevskii

### 6.3.1 Cas du coefficient $\alpha$

Nous avons vu que dans la limite de Gross-Pitaevskii, les fluctuations de densité du quasicondensat sont représentées par les excitations des modes de Bogoliubov. Le hamiltonien du système est donné par

$$(H - \mu N)^{(2)} = \sum_q \epsilon_q b_q^\dagger b_q. \quad (6.27)$$

Introduisons le vide d'excitations  $|0\rangle$  comme état fondamental, qui est détruit par l'application d'opérateurs d'annihilation  $b_q : b_q |0\rangle = 0$ . Les excitations de mode  $q$  sont, quant à elles, créées en appliquant les opérateurs de création  $b_q^\dagger$  sur le vide. Les modes de Fourier de la densité locale  $\tilde{\rho}_q$  peuvent être exprimés comme une combinaison linéaire des opérateurs de Bogoliubov

$$\tilde{\rho}_q = \sqrt{\rho_0 L} \left( \left( \cosh(\tilde{\theta}_{-q}/2) - \sinh(\tilde{\theta}_q/2) \right) b_{-q} + \left( \cosh^*(\tilde{\theta}_q/2) - \sinh^*(\tilde{\theta}_{-q}/2) \right) b_q^\dagger \right). \quad (6.28)$$

Au vue de la forme de la densité  $\tilde{\rho}_q$ , l'élément de matrice  $\langle n | \tilde{\rho}_q | 0 \rangle$  présent dans la susceptibilité linéaire (6.7) est non nul si et seulement si l'état excité  $|n\rangle$  est donné par  $|n\rangle = b_q^\dagger |0\rangle$ . On voit donc que la susceptibilité linéaire est entièrement déterminée par un seul état excité :

$$\tilde{\chi}(q) = -2\rho_0 \frac{|\cosh^*(\tilde{\theta}_q/2) - \sinh^*(\tilde{\theta}_{-q}/2)|^2}{\epsilon_q} |\langle 0 | b_q b_q^\dagger | 0 \rangle|^2 = -2\rho_0 \frac{|e^{-\tilde{\theta}_q/2}|^2}{\epsilon_q}. \quad (6.29)$$

En sachant que

$$e^{-\tilde{\theta}_q/2} = \left( \frac{\hbar^2 q^2 / 2m}{2\mu + \hbar^2 q^2 / 2m} \right)^{1/4}, \quad (6.30)$$

la susceptibilité linéaire se lit au deuxième ordre en  $q$

$$\tilde{\chi}(q) = -\frac{1}{g} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 q^2}{2m\rho_0 g} \right)^{-1} \underset{q \rightarrow 0}{\simeq} -\frac{1}{g} + \frac{m}{2\hbar^2 \rho_0^3 \gamma^2} \frac{q^2}{2} + O(q^4). \quad (6.31)$$

L'identification du coefficient  $\alpha$  se fait par comparaison avec l'équation (6.12) et conduit à

$$\alpha_{\text{GP}}(\gamma) = \alpha(\gamma \rightarrow 0) = \frac{m}{4\hbar^2 \gamma^2}. \quad (6.32)$$

Contrairement au résultat obtenu dans la limite de Tonks-Girardeau, le coefficient  $\alpha$  est ici explicitement dépendant du paramètre de Lieb  $\gamma$  et est positif. Ainsi, la correction à la LDA tend à faire diminuer la densité du gaz de Bose à proximité des minima locaux du potentiel de piégeage.



### 6.3.2 Cas du coefficient $\beta$

Dans cette limite, la valeur de  $\beta$  est déterminée par des considérations de symétrie. En effet, comme le hamiltonien (2.33) ne contient que des termes proportionnels à  $\delta\rho^2$ , il est invariant peu importe que l'on considère des fluctuations de densité au-dessus ou en-dessous de la densité de l'état fondamental  $\rho_0$ . Or la susceptibilité non linéaire définie en (6.6) change de signe si on remplace  $\delta\rho$  par  $-\delta\rho$ . Afin de respecter les symétries du hamiltonien, il faut donc que  $\phi(x, y, z)$  soit nul. Il en découle alors

$$\beta_{\text{GP}} = \beta(\gamma \rightarrow 0) = 0. \quad (6.33)$$

L'approche théorique étant à présent établie, nous donnons dans la suite, une méthode numérique permettant de corroborer les calculs analytiques. Les figures obtenues reposent toutes sur l'utilisation de cette méthode.

## 6.4 Sommation numérique des facteurs de formes pour le modèle de Lieb-Liniger

Nous présentons ici une méthode numérique basée sur l'ansatz de Bethe. En principe, elle peut s'adapter à tous systèmes intégrables solubles par l'ansatz de Bethe. Notre méthode se scinde en deux étapes, d'abord nous construisons les états propres du modèle LL comme des configurations de rapidités, puis nous nous servons de ces états propres pour calculer les éléments de matrice de l'opérateur densité. Nous pouvons ainsi déterminer numériquement les quantités définies en (6.7) et (6.8) pour une large gamme de paramètre  $\gamma$ .

### 6.4.1 Construction des états propres du modèle LL et calcul des facteurs de formes

Dans le chapitre 2 de ce mémoire, nous avons montré que les états propres du modèle de LL sont construits à partir de séquences spécifiques de nombres de Bethe. A un état propre correspond une unique configuration de nombres de Bethe. Puisque nous nous intéressons uniquement aux états excités de paires particules-trous, il est plus aisé de partir de la configuration de nombres de Bethe correspondant au fondamental pour construire les autres états. Nous avons vu que l'état fondamental du système à  $N$  particules était décrit par une mer de Dirac  $\{I_j\} = \{-\frac{N-1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}\}$  et que l'impulsion total d'un état pouvait être déduite de sa séquence de nombres de Bethe par la relation  $P = \sum_j \frac{2\pi}{L} I_j$ .

Il n'est pas très difficile de générer numériquement ces séquences de nombres de Bethe à partir de l'état fondamental. Pour un nombre de particules fixé et pour une impulsion donnée, les états excités à une paire particules-trous sont obtenus en écrivant l'impulsion choisie comme la différence d'impulsion de la particule enlevée et de la particule créée. Comme nous connaissons l'impulsion de la particule ôtée, nous en déduisons facilement l'impulsion de la particule créée, qui est un multiple entier ou demi-entier de  $\frac{2\pi}{L}$ . Pour une même impulsion totale, nous répétons l'opération pour chaque particule et nous trouvons ainsi toutes les configurations possibles. Comme l'impulsion totale peut s'écrire  $P = \frac{2\pi}{L} p$  où  $p$  est un nombre entier, le nombre d'états excités à une paire est exactement  $p$ . On peut ainsi classer les états excités à une paire par leur impulsion totale.

Pour les états excités à deux et trois paires, bien que la méthode soit la même, on ne peut pas prévoir le nombre d'états excités avec une impulsion donnée. Le nombre d'états excités à générer devient vite énorme et il faut alors tronquer la génération d'états excités. C'est la raison pour laquelle on introduit un cut-off, multiple entier de  $\frac{2\pi}{L}$ , chargé de fixer une limite à la création d'états excités.

A priori, nous devons choisir un cut-off suffisamment grand pour prendre en compte une quantité suffisante d'états excités à deux ou trois paires, mais plus la valeur du cut-off augmente et plus le temps de calcul nécessaire s'accroît également.

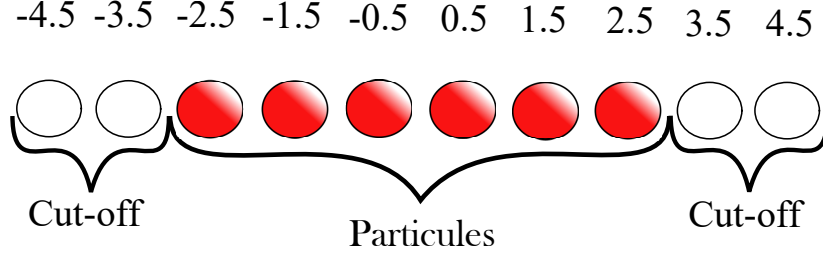


FIGURE 6.1 – Schéma de la configuration de nombres de Bethe correspondant à l'état fondamental d'un système avec  $N = 6$  particules. Les bulles vides sont les nombres de Bethe dont l'accès est autorisé par le cut-off. Les nombres de Bethe sont indiqués au dessus des bulles.

Si l'on prend l'exemple d'un système de  $N = 6$  particules avec un cut-off de  $\frac{2\pi}{L} \times 2$  et que l'on veut construire tous les états excités à deux paires particules-trous. Cela revient à dénombrer toutes les possibilités de créer deux trous parmi six particules ainsi que toutes les possibilités de créer deux trous parmi les quatre lacunes autorisées par le cut-off. Le calcul donne  $\Omega = 90$  états à deux paires. Pour un cut-off de  $\frac{2\pi}{L} \times 3$ , on a  $\Omega = 225$ . Ces états sont ensuite classés par impulsion totale pour être utilisés.

Une fois les configurations de nombre de Bethe générées, nous devons les injecter dans les équations de Bethe afin de les convertir en séquences de rapidités  $\{\lambda_j\}$ . Nous choisissons d'écrire les équations de Bethe sous cette forme

$$\lambda_j + \frac{2}{L} \sum_k \arctan\left(\frac{\lambda_j - \lambda_k}{g}\right) = \frac{2\pi}{L} I_j, \quad (6.34)$$

que nous résolvons en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

Chaque séquence renvoie donc à un seul état à  $N$  corps dont on connaît l'impulsion  $P = \sum_j \lambda_j$  et l'énergie  $E = \sum_j \frac{\lambda_j^2}{2}$ .

A présent nous pouvons déterminer les éléments de matrices ou facteurs de formes contenus dans les relations (6.7) et (6.13) et ainsi calculer numériquement les susceptibilités  $\tilde{\chi}(q)$  et  $\tilde{\phi}(q_1, q_2)$ . Pour ce faire, nous implémentons numériquement une formule analytique issue de l'ansatz de Bethe algébrique [89, 90, 91, 46] et que l'on peut retrouver par exemple dans la référence [89] (formule (2.12))

$$\langle \mu | \rho(0) | \lambda \rangle = \sum_j^N (\mu_j - \lambda_j) \prod_j^N (V_j^+ - V_j^-) \prod_{j,k}^N \left( \frac{\lambda_j - \lambda_k + i g}{\mu_j - \lambda_k} \right) \frac{\det_N(\delta_{jk} + U_{jk})}{V_p^+ - V_p^-}, \quad (6.35)$$

avec

$$V_j^\pm = \prod_k^N \left( \frac{\mu_k - \lambda_j \pm i g}{\lambda_k - \lambda_j \pm i g} \right), \quad U_{jk} = i \frac{\mu_j - \lambda_j}{V_j^+ - V_j^-} \prod_{m \neq j}^N \left( \frac{\mu_m - \lambda_j}{\lambda_m - \lambda_j} \right) (K(\lambda_j - \lambda_k) - K(\lambda_p - \lambda_k)).$$

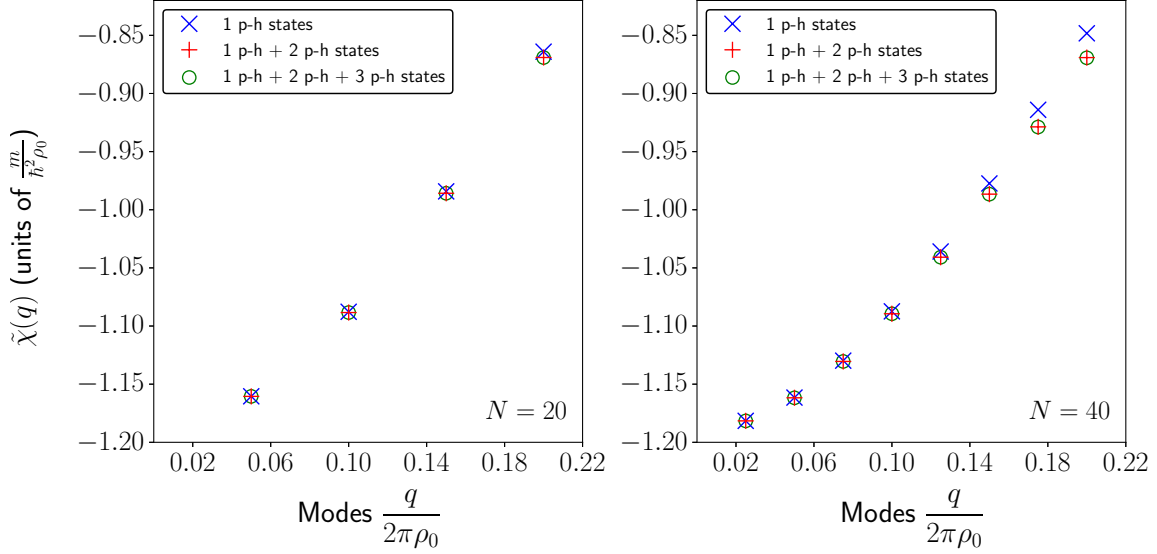


FIGURE 6.2 – La susceptibilité linéaire pour les modes  $q$  les plus faibles selon le type d’excitations considérées. Le paramètre de Lieb et la densité sont fixés  $\gamma = 1$  et  $\rho_0 = 1$ . Les états excités à deux paires et trois paires particule/trou sont générés avec un cut-off dont la valeur est  $\kappa = 16\pi/L$ . Les croix bleues correspondent à la susceptibilité linéaire calculée avec uniquement des états excités à une paire particule/trou, les croix rouges représentent la susceptibilité linéaire calculée avec les états à une et deux paires particule/trou. Enfin les cercles verts montrent l’allure de la susceptibilité linéaire déterminée avec des états à une, deux et trois paires particule/trou. A gauche la taille du système est  $L = 20$  tandis qu’à droite la taille du système est  $L = 40$ . Cette figure est tirée, avec permission, de l’article [8], Copyright(2022).

La figure Fig.(6.2) met en évidence l’importance des différents types d’états excités considérés dans le calcul de la susceptibilité linéaire. On observe que la susceptibilité est majoritairement gouvernée par les éléments de matrices faisant intervenir des états excités à une paire particule-trou. Les états excités à deux et trois paires particule-trou ont une contribution négligeable à la susceptibilité, en particulier pour de faibles modes  $q$ . Le développement analytique réalisé dans le régime de Tonks-Girardeau ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) et dans la limite de Gross-Pitaevskii ( $\gamma \rightarrow 0$ ) suggérait déjà que seuls les états excités à une paire particule-trou contribuent à la susceptibilité linéaire  $\tilde{\chi}(q)$ . Mais la sommation numérique des facteurs de formes (6.7) indique que les états excités à une paire particule-trou dominent la susceptibilité pour une force d’interaction  $\gamma$  quelconque.

De plus, pour un mode  $q$  donné on peut évaluer la contribution de chaque état excité à une paire particule-trou à la susceptibilité linéaire. La figure Fig.(6.4.1) en montre un exemple pour le mode  $q = \frac{8\pi}{L}$  et pour différentes valeurs du paramètre de Lieb  $\gamma$ . Sur cette figure, on observe que la susceptibilité linéaire n’est gouvernée que par un seul état excité pour une force d’interaction tendant vers zéro, confirmant ainsi la description théorique de la susceptibilité linéaire dans la limite de Gross-Pitaevskii. A mesure que  $\gamma$  augmente le poids des états excités dans la valeur de  $\tilde{\chi}(q)$  est redistribué de telle manière à ce que chaque état excité donne une contribution identique.

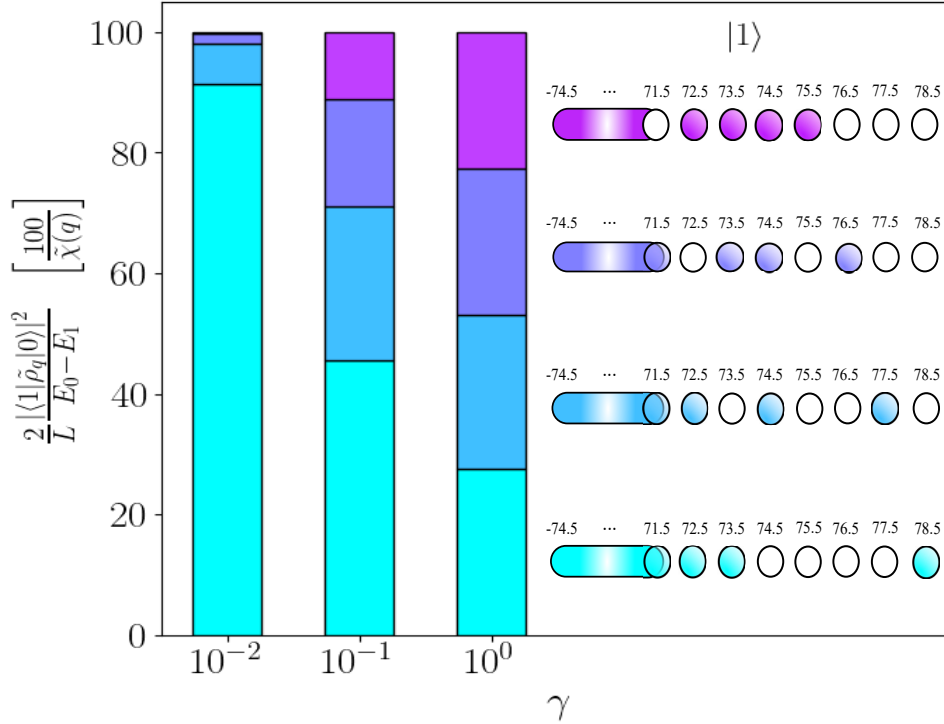


FIGURE 6.3 – Contribution des états à une paire particule-trou à la susceptibilité linéaire  $\tilde{\chi}$  pour le mode  $q = \frac{8\pi}{L}$ . Le nombre de particule est  $N=150$  et la densité homogène est fixée  $\rho_0=0$ . La susceptibilité est calculée pour trois valeurs du paramètre de Lieb  $\gamma$  et les états excités notés  $|1\rangle$  sont indiqués à droite sous le forme de séquences de nombre de Bethe.

### 6.4.2 Calcul des coefficients $\alpha$ et $\beta$

Nous détaillons ici la procédure pour obtenir le coefficient  $\alpha$  à partir de la susceptibilité linéaire  $\tilde{\chi}(q)$ . L'extension de cette méthode pour  $\beta$  est immédiate.

Lorsque nous déterminons la susceptibilité linéaire pour une valeur fixée du paramètre de Lieb  $\gamma$ , nous obtenons les figures présentées dans Fig.(6.4.1). Dans la mesure où nous nous concentrons sur le comportement de la susceptibilité  $\tilde{\chi}(q)$  pour les plus petites valeurs de  $q$ , nous admettons que l'allure de la susceptibilité linéaire est bien reproduite par le développement de Taylor (6.9). L'extraction du coefficient  $\alpha$  se fait en réalisant un fit numérique en  $a_1 + a_2 q^2 + a_3 q^4$  des valeurs de  $\tilde{\chi}(q)$  (voir Fig. (6.4) gauche). Conformément à la définition (6.12), le coefficient  $\alpha$  est alors déduit du paramètre  $a_2$ . En répétant l'opération pour des valeurs différentes du paramètre de Lieb  $\gamma$ , on peut construire la fonction  $\alpha(\gamma)$  (voir Fig. (6.4) droite).

Comme on peut le voir sur la figure 6.4, la méthode employée pour calculer numériquement le coefficient  $\alpha$  donne des résultats en parfait accord avec le calcul analytique pour la limite de Tonks-Girardeau et la limite de Gross-Pitaevskii. Par conséquent, la sommation des facteurs de formes avec uniquement des états excités à une paire particule-trou est suffisante pour reproduire les résultats prédits analytiquement. De plus, notre méthode nous permet également de déterminer le coefficient  $\alpha$  pour une force d'interaction  $\gamma$  intermédiaire.

Nous employons la même méthode pour extraire le coefficient  $\beta(\gamma)$  à partir de la susceptibilité non-linéaire  $\tilde{\phi}(q_1, q_2)$ . La figure 6.5 montre (à gauche) le fit polynomial de

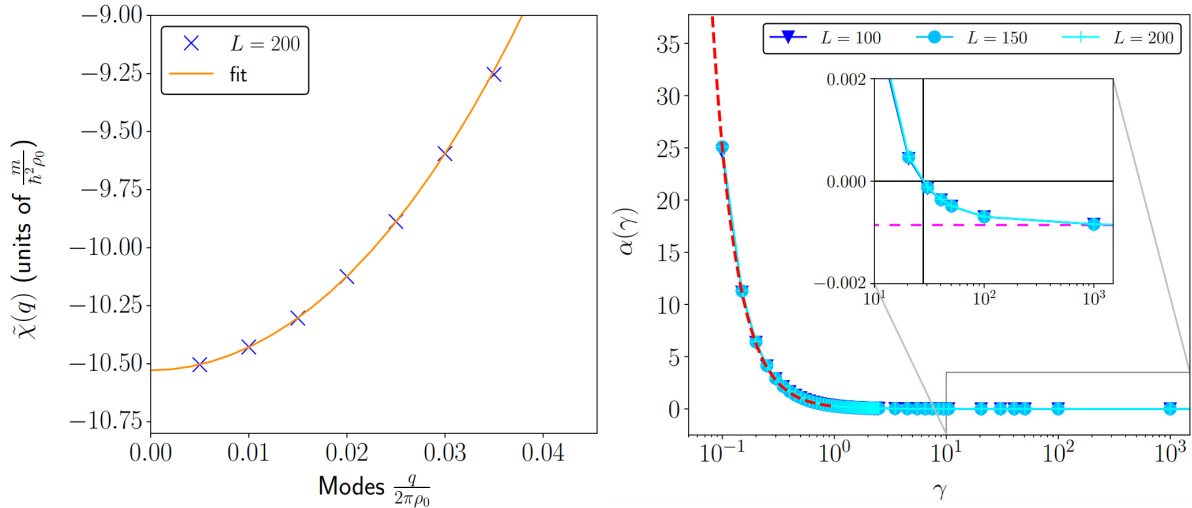


FIGURE 6.4 – A gauche : la susceptibilité linéaire  $\tilde{\chi}(q)$  (croix bleues) en fonction des modes  $q$  pour une taille de système  $L = 200$ , une densité  $\rho_0 = 1$  et un paramètre de Lieb  $\gamma = 1.0$ . Pour les petites valeurs de  $q$  la susceptibilité est bien décrite par un fit (courbe orange) en  $a_1 + a_2 q^2 + a_3 q^4$  dont les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  sont à identifier, via la relation (6.9), respectivement à la compressibilité  $\tilde{\chi}(0)$  et à la courbure de la susceptibilité  $d^2\tilde{\chi}(0)/dq^2$ . A droite : le coefficient  $\alpha$  comme une fonction de  $\gamma$  pour différentes tailles de système  $L = 100$ ,  $L = 150$  et  $L = 200$ . Les comportements asymptotiques prédits analytiquement sont représentés en pointillés rouge pour le régime de Gross-Pitaevskii où  $\alpha(\gamma \rightarrow 0) = \frac{1}{4\gamma^2}$  et en pointillés magenta pour le régime de Tonks-Girardeau où  $\alpha(\gamma \rightarrow \infty) = -\frac{1}{12\pi^4}$ . Ces figures sont tirées, avec permission, de l'article [8], Copyright(2022) par l'American Physical Society.

la susceptibilité non-linéaire pour de faibles valeurs de modes ( $q_1, q_2$ ) et (à droite) l'allure de  $\beta$  en fonction du paramètre de Lieb  $\gamma$ , pour différentes tailles de système.

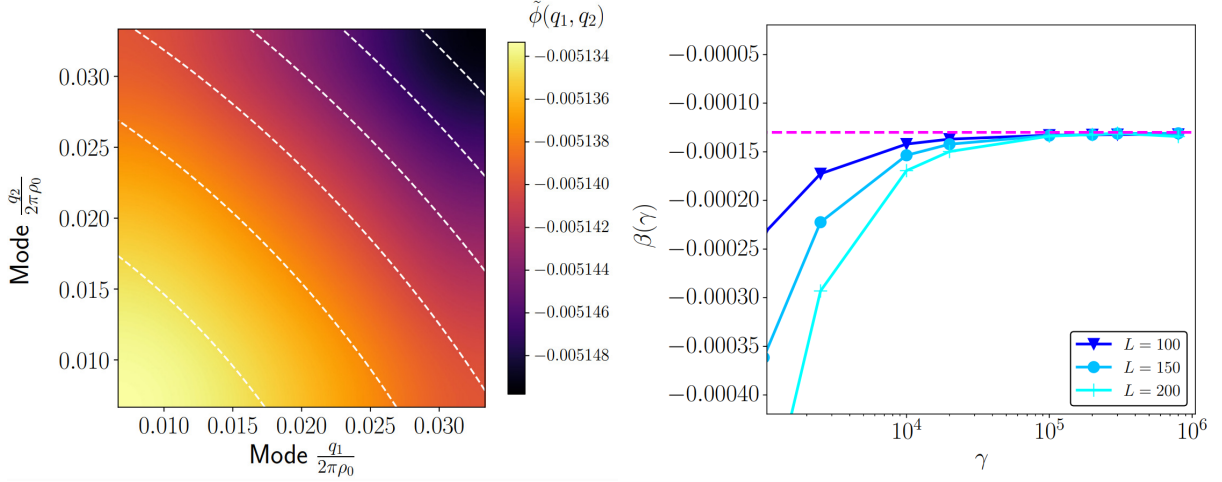


FIGURE 6.5 – A gauche : la susceptibilité non linéaire  $\tilde{\phi}(q_1, q_2)$  est représentée par la variation de couleur dans le plan  $(q_1, q_2)$  pour  $L = 150$ ,  $\rho_0 = 1$  et  $\gamma = 3 \times 10^5$ . Les pointillés blancs sont issus d'un fit en  $a_1 + a_2 q_1 q_2 + a_3 q_1^2 + a_4 q_2^2$  et le coefficient  $a_2$  permet de calculer  $\beta$  conformément à la relation (6.13). A droite : le coefficient  $\beta$  comme une fonction de  $\beta$  pour trois tailles de système différentes  $L = 100$ ,  $L = 150$  et  $L = 200$ . Les pointillés magenta correspondent à la valeur prédite théoriquement dans la limite de Tonks-Girardeau  $\beta(\gamma \rightarrow \infty) = -\frac{1}{8\pi^6}$ . Ces figures sont tirées, avec permission, de l'article [8], Copyright(2022) par l'American Physical Society.

On observe ici que l'accord entre le résultat théorique numérique (Fig 6.5 droite) dans la limite de Tonks-Girardeau est parfait pour de très hautes valeurs de  $\gamma$ , la convergence vers la valeur théorique est plus lente que pour  $\alpha(\gamma)$ . De plus, les coefficients  $a_2, a_3$  et  $a_4$  du fit utilisé peuvent être déterminés numériquement et vérifient la propriété de symétrie  $a_2 = a_3 = a_4$  découlant de  $\tilde{\phi}(q_1, q_2) = \tilde{\phi}(q_2, q_1) = \tilde{\phi}(q_1, -q_1 - q_2)$ . En revanche, l'écart entre la théorie et le numérique se creuse rapidement à mesure que  $\gamma$  diminue et devient significatif pour  $\gamma < 10^4$ , ce qui reste une valeur d'interaction très forte. Il apparaît donc que l'extraction du coefficient  $\beta$  à partir du fit polynomial de la susceptibilité non-linéaire n'est plus adapté. Cela peut s'expliquer par le choix de restreindre la double somme aux états excités à une paire particule-trou uniquement. L'incorporation des états excités à  $n > 1$  paires particule-trou dans le calcul de la susceptibilité non-linéaire est une tâche complexe qui nécessite une étude approfondie des contributions respectives des états à  $n$  paires particule-trou. Aussi, nous ne reviendrons pas sur cette partie dans la suite de ce manuscrit.

### 6.4.3 Applications

Pour clôturer ce chapitre, nous illustrons la pertinence du formalisme développé plus haut en comparant plusieurs profils de densité obtenu par simulation DMRG [92] avec la LDA intégrant le terme correctif  $B$  introduit en (6.2). Les simulations DMRG du gaz de Bose inhomogène constituent ici notre référence pour évaluer la précision qu'apporte l'ajout de ce terme correctif. La correction  $C$  de (6.2) n'est pas utilisée ici car nous n'avons pas accès à la valeur du coefficient  $\beta(\gamma)$ , dont  $C$  dépend, pour un paramètre de Lieb  $\gamma$  quelconque. Pour obtenir les profils de densité du modèle de Lieb-Liniger en présence d'un potentiel extérieur, nous lançons des simulations DMRG pour la chaîne  $XXZ$  comportant  $N = 40$  particules réparties sur  $L = 1000$  sites. Le fait que les propriétés physiques de

systèmes continus sont extraites de modèles de gaz sur réseau ou de chaînes de spins, est une conséquence de la correspondance qui existe, dans certaines limites, entre les états propres et valeurs propres des modèles discrets et continus. A titre d'exemple, les propriétés du modèle de Lieb-Liniger peuvent être déduites de simulations DMRG du modèle de Bose-Hubbard [58], mais aussi de la chaîne de  $XXZ$  [93, 94, 95].

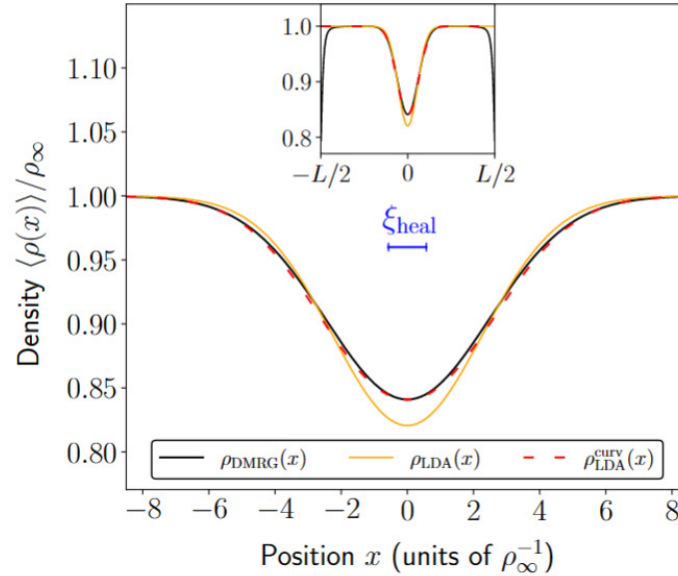


FIGURE 6.6 – Profil de densité du gaz de Bose unidimensionnel en présence de potentiels de piégeage. La courbe noire représente le profil de densité obtenu par une simulation DMRG, la courbe orange correspond au profil de densité prédit par la LDA standard et la courbe en pointillés rouges constitue la LDA corrigée par le terme  $B$  (voir Eq. (6.2)). Le potentiel est une barrière de forme gaussienne  $V(x) = V_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$  avec  $V_0=0.00013$  et  $\sigma = 55(= 2.27\rho_\infty^{-1})$ . La quantité  $\rho_\infty$  désigne la densité loin de la barrière. La petite figure insérée montre une vue d'ensemble du système, loin du centre de la barrière la densité est quasiment homogène. La healing length représentée en bleu permet de justifier l'emploi de la LDA et montre que le potentiel ne varie que très peu à l'échelle de  $\xi_{\text{heal}}$ . Cette figure est tirée, avec permission, de l'article [8], Copyright(2022) par l'American Physical Society.

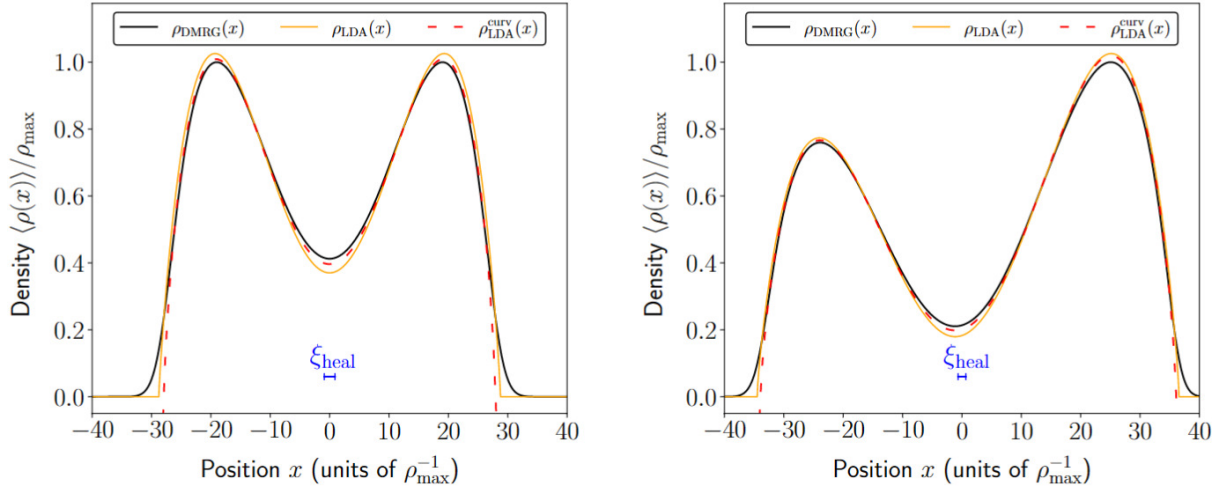


FIGURE 6.7 – Profils de densité du gaz de Bose unidimensionnel en présence de potentiels de piégeage. Pour les deux figures, la courbe noire représente le profil de densité obtenu par une simulation DMRG, la courbe orange correspond au profil de densité prédit par la LDA standard et la courbe en pointillés rouges constitue la LDA corrigée par le terme  $B$  (voir Eq. (6.2)). A gauche, le potentiel de piégeage est un double puits  $V(x) = 1.8 \times 10^{-12} x^4 - 10^{-7} x^2$  et  $\rho_{\max}$  est la densité maximum. A droite, le potentiel est un double puits asymétrique  $V(x) = 1.25 \times 10^{-12} x^4 - 1.18 \times 10^{-7} (x + 10)^2$  et là encore  $\rho_{\max}$  est la densité maximum. Nous avons indiqué en bleu la healing length afin de montrer que les variations du potentiel se font sur des distances plus grandes que  $\xi_{\text{heal}}$ .

Ces figures sont tirées, avec permission, de l'article [8], Copyright(2022) par l'American Physical Society.

On constate que la correction apportée à la LDA améliore grandement sa précision autour des extremum du potentiel de piégeage et ce quelque soit le potentiel de piégeage. Cela se comprend bien dans la mesure où le terme correctif  $B(V(x))$  est directement proportionnel à la courbure du potentiel. De plus, le fait de ne pas prendre en compte le coefficient  $C(V(x))$  n'a aucune incidence autour des extrema du potentiel, dans la mesure où  $C(V(x))$  est proportionnelle au gradient du potentiel. Comme mentionné dans le chapitre 3, les bords du profil de densité ne peuvent pas être décrits par l'approche de la LDA et la prise en compte de notre correction ne résout pas ce problème. La raison est que notre correction suppose au préalable l'applicabilité de la LDA.

## 6.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons proposé une autre manière d'appréhender la LDA. En considérant la densité locale d'un système inhomogène comme une fonctionnelle locale du potentiel de piégeage, la LDA est perçue comme l'ordre zéro d'un développement en gradient du potentiel. Les termes d'ordre supérieur peuvent alors s'interpréter comme des corrections à la LDA standard. Nous avons montré que ces corrections sont nulles au premier ordre pour des raisons de symétrie et qu'il était possible de calculer les corrections du second ordre à partir d'un système homogène soumis à un faible potentiel de piégeage  $\delta V$ . Un traitement perturbatif au premier ordre de  $\delta V$  fournit le coefficient  $\alpha(\gamma)$  tandis qu'en poussant le calcul jusqu'au second ordre, il est possible d'obtenir le coefficient  $\beta(\gamma)$ . Dans la limite de Tonks-Girardeau, ces deux coefficients sont des constantes négatives alors



---

que dans la limite de Gross-Pitaevskii,  $\alpha$  dépend explicitement du paramètre de Lieb  $\gamma$  et  $\beta$  est nul pour des raisons de symétries. Pour le coefficient  $\alpha$ , l'approche numérique de sommation des facteurs de formes permet de retrouver les résultats analytiques dans les deux régimes d'interactions en ne prenant en compte que les excitations à une paire particule/trou. De plus, nous pouvons construire numériquement  $\alpha(\gamma)$  pour toutes valeurs de  $\gamma$ . En revanche, il semble que cette méthode numérique ne puisse pas s'appliquer au calcul de  $\beta$ . Dans le régime de forte interaction, la prise en compte exclusive des excitations à une paire particule/trou redonne bien le résultat analytique pour  $\beta$ , mais échoue totalement à prédire le comportement de  $\beta$  pour des valeurs de  $\gamma$  plus faibles. Le fait d'incorporer numériquement des états excités à deux et trois paires particule/trou lors du calcul des facteurs de formes pourrait potentiellement remédier à ce problème, mais cela reste une tâche ardue qui sort du spectre du travail présenté ici. Toutefois, il apparaît que la précision de la LDA est déjà grandement améliorée en ne considérant que la correction proportionnelle à  $\alpha$ . Cela a été vérifiée en comparant des profils de densité obtenus via des simulations DMRG avec notre LDA corrigée. Il est à mentionner que les corrections calculées dans ce manuscrit sont sous-dominantes par rapport à la LDA standard et ne sont donc pas adaptées à des problèmes pour lesquels la LDA échoue à prédire le phénomène observé.

# Chapitre 7

## Effets des pertes atomiques sur un gaz de fermions sur réseau

### 7.1 Modèle et hypothèses

Durant les expériences d'atomes ultra froids, on souhaite isoler le gaz d'atomes de son environnement au moyen de pièges optiques ou magnétiques. Même si les méthodes utilisées pour confiner le gaz sont parmi les plus sophistiquées, le système n'est jamais totalement isolé et il demeure toujours un couplage avec l'environnement. Ce couplage se manifeste sous la forme de pertes atomiques, dans lesquelles un ou plusieurs atomes s'échappent du piège. Plusieurs expériences ont déjà mis en évidence des phénomènes de pertes de différentes natures. Par exemple, on a constaté l'apparition de pertes à un corps résultant de la collision entre un atome froid et un atome plus chaud, qui n'a pas été éliminé durant le processus de refroidissement par évaporation. Le transfert d'énergie peut être suffisant pour éjecter l'atome froid du piège optique ou magnétique. Des pertes à deux [96, 97, 98, 99, 100] et trois corps [101, 102, 103] ont aussi été observées. Ces dernières sont toujours présentes durant une expérience d'atome froid. Le phénomène de pertes atomiques étant inévitable expérimentalement, il est important de comprendre son impact sur le système étudié. Dans cette optique, nous montrons, dans ce chapitre, l'effet d'un tel couplage sur un système homogène de  $N$  bosons de cœur dur vivant sur une chaîne de  $L$  sites. L'objectif est ici de donner une description théorique des pertes atomiques à  $K$  corps pour un système intégrable. En particulier, nous nous intéressons aux effets de ces pertes sur la densité moyenne de particules, ainsi que sur la distribution de rapidité. La question générale qui structure l'ensemble de ce chapitre, est de savoir si la destruction de l'intégrabilité, causée par les phénomènes de pertes, provoque, à des temps suffisamment longs, la relaxation du système vers un état thermique. Pour répondre au mieux à cette problématique, le comportement aux temps longs de la distribution de rapidité et de la densité de particule est traité en détails pour les cas  $K = 1$  et  $K = 2$ . Nous sommes également en mesure d'étendre notre formalisme au système inhomogène, dans lequel le gaz de bosons est piégé dans un potentiel harmonique. La dynamique du système inhomogène soumis à des pertes atomiques, est alors étudiée à l'aide du formalisme de la fonction de Wigner.

Les trois sous-sections suivantes, sont dédiés à la présentation précise du modèle (Sous-section 7.1.1), aux hypothèses permettant de simplifier la description des pertes (Sous-section 7.1.2) et à l'établissement de l'équation d'évolution de la distribution de rapidité (Sous-section 7.1.3). La section 7.2 est consacrée au calcul de la quantité fondamentale

du modèle, la fonctionnelle de perte, qui apparaît dans l'équation d'évolution de la distribution de rapidité. Cette fonctionnelle est déterminée analytiquement pour différentes valeurs de  $K$ . La section 7.3 présente la méthode utilisée pour résoudre l'équation d'évolution de la distribution de rapidité. Les résultats analytiques ( $K = 1$ ,  $K = 2$ ) sont confirmés par la résolution numérique de l'équation d'évolution. Le comportement aux temps longs de la densité de particules et de la distribution de rapidité est également étudié. Enfin, la section 7.4 détaille la méthode numérique employée pour résoudre l'équation d'évolution de la fonction de Wigner du système en présence d'un potentiel harmonique.

### 7.1.1 Modèle du gaz de Tonks-Girardeau sur réseau soumis à des pertes à $K$ corps

Nous considérons un système de bosons de cœur dur se déplaçant sur une chaîne composée de  $L$  sites. La contrainte de cœur dur impose que deux bosons ne peuvent pas se trouver sur le même site  $j$  ; les sites sont alors occupés par un boson ou sont vacants. Il s'agit donc d'étudier un gaz de Tonks-Girardeau sur réseau. Le caractère fermionique de ce modèle conduit à introduire les opérateurs  $\sigma_j^+/\sigma_j^-$ , créant/détruisant un boson sur le site  $j$  et satisfaisant les relations de commutation des matrices de Pauli  $[\sigma_i^+, \sigma_j^-] = \delta_{i,j} \sigma_j^z$ ,  $\{\sigma_i^+, \sigma_j^-\} = \delta_{i,j}$  et conséquemment  $(\sigma_j^+)^2 = (\sigma_j^-)^2 = 0$ . En restreignant les déplacements des bosons aux premiers sites voisins, nous pouvons écrire le hamiltonien du système bosonique comme

$$H_{\text{HCB}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^L (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^-), \quad (7.1)$$

où l'indice HCB vient de "hardcore boson" signifiant "cœur dur" en anglais. Nous supposons que le gaz de bosons est couplé à son environnement et que ce couplage consiste en des processus de pertes à  $K$  corps, avec  $K = 1, 2, \dots$ . Nous choisissons de décrire la dynamique du système soumis aux pertes atomiques à l'aide de la version markovienne de l'équation de Lindblad,

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = -i[H_{\text{HCB}}, \hat{\rho}(t)] + \Gamma \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( L_j \hat{\rho}(t) L_j^\dagger - \frac{1}{2} \{L_j^\dagger L_j, \hat{\rho}(t)\} \right), \quad (7.2)$$

où  $\hat{\rho}$  est la matrice densité. La dynamique du système sous l'effet des pertes se décompose en une partie unitaire dont le hamiltonien  $H_{\text{HCB}}$  est le générateur et une partie dissipative contenant la constante  $\Gamma$  qui mesure le taux de pertes ainsi que les dissipateurs de Lindblad  $L_j^\dagger/L_j$ . Ces derniers caractérisent le processus de perte et quantifie le nombre de bosons perdu par le système. Dans notre modèle nous considérons qu'à chaque événement de pertes atomiques, le système perd  $K$  bosons se trouvant sur  $K$  sites consécutifs, soit du site  $j$  au site  $j + K - 1$ . Ainsi, les opérateurs de Lindblad sont de la forme

$$L_j = \prod_{l=0}^{K-1} \sigma_{j+l}^-. \quad (7.3)$$

En l'état, l'équation (7.2) est trop compliquée pour être étudiée. Il convient alors de prendre certaines hypothèses afin de simplifier cette équation.

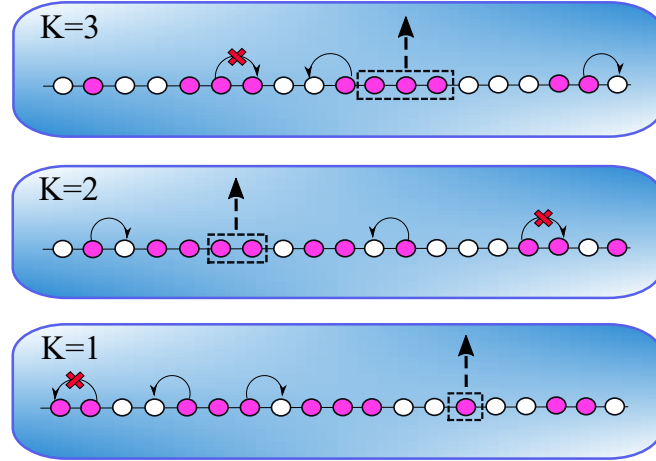


FIGURE 7.1 – Ce schéma illustre le modèle de bosons de cœur dur soumis au processus de pertes pour les cas  $K = 1$ ,  $K = 2$ , et  $K = 3$ . Le fond bleu représente l’environnement tandis que les sphères roses et blanches correspondent respectivement aux sites occupés et sites vacants. Les fines flèches noires indiquent quels mouvements sont autorisés pour les bosons et les larges flèches noires montrent le phénomène de perte. Dans chacun des cas, nous retirons  $K$  atomes consécutifs.

### 7.1.2 Hypothèse de pertes adiabatiques

Comme mentionné dans la sous-section précédente, le modèle construit est trop général pour être traité tel qu’il est. Afin de décrire au mieux les effets des pertes atomiques à  $K$  corps, nous faisons l’hypothèse que ces dernières sont adiabatiques. Cela signifie que nous supposons que le phénomène de pertes se produit sur des échelles de temps beaucoup plus longues, que le temps caractéristique nécessaire au système pour relaxer. Ainsi, entre deux processus de pertes, le gaz de bosons a suffisamment de temps pour atteindre localement un état stationnaire. L’hypothèse de pertes adiabatiques a déjà été utilisée pour traiter le gaz de Tonks-Girardeau continu soumis à des pertes à un corps [34].

Toutefois, avant d’explicitier les conséquences de l’hypothèse des pertes lentes, intéressons nous à l’évolution temporelle des charges conservées. Comme le modèle traité est intégrable, il existe un nombre macroscopique d’opérateurs hermitiens  $Q_i$ , avec  $i = 0, 1, 2, \dots$ , qui commutent tous entre-eux, mais aussi avec le hamiltonien  $H_{\text{HCB}}$  :  $[Q_i, Q_j] = [H_{\text{HCB}}, Q_i] = 0 \quad \forall i, \forall j$ . Ces opérateurs peuvent s’exprimer par l’intermédiaire d’un opérateur densité de charge  $q_{i,j}$ ,  $Q_i = \sum_{j=1}^L q_{i,j}$ , les opérateurs  $Q_i$  sont dits locaux. Les densités de charges agissent sur une zone d’extension finie centrée sur le site  $j$ . L’évolution temporelle d’une charge conservée  $\langle Q_i \rangle(t) = \text{Tr}(\hat{\rho}(t)Q_i)$  est alors donnée par la partie dissipative de l’équation (7.2)

$$\begin{aligned} \langle \dot{Q}_i \rangle(t) &= \frac{\Gamma}{2} \sum_{j=1}^L \left\langle L_j^\dagger [Q_i, L_j] + [L_j^\dagger, Q_i] L_j \right\rangle(t) \\ &= \Gamma \sum_{j=1}^L \text{Re} \left\langle L_j^\dagger [Q_i, L_j] \right\rangle(t), \end{aligned} \quad (7.4)$$

où nous avons utilisé l’hermiticité des opérateurs  $Q_i$  :  $\langle [L_j^\dagger, Q_i] L_j \rangle = \langle L_j^\dagger [Q_i, L_j] \rangle^*$ . Cette équation découle directement de (7.2) et ne fait l’objet d’aucune approximation. L’incon-

venient de cette équation est qu'elle nécessite la connaissance de la matrice densité  $\hat{\rho}(t)$  pour évaluer le membre de droite.

A présent voyons comment l'hypothèse des pertes lentes peut nous permettre de nous affranchir de la matrice densité. Tout d'abord, remarquons que dans l'équation (7.4), l'ensemble des opérateurs présents sont locaux. En effet, le terme  $L_j^\dagger[Q_i, L_j]$  est local car il est le produit d'opérateurs locaux,  $L_j$  et  $q_i$ ,  $j$  ont une action sur un nombre fini de sites autour du site  $j$ . Si maintenant nous supposons que les pertes sont assez lentes pour permettre au système de relaxer localement, alors on s'attend à ce qu'une petite portion du système relaxe vers un ensemble de Gibbs généralisé (GGE) dépendant du temps [104]. La matrice densité associée à ce petit sous-système est alors

$$\hat{\rho}_{\text{GGE},\{Q_i\}} \propto e^{-\sum_i \beta_i Q_i}, \quad (7.5)$$

où les  $\beta_i$  sont des multiplicateurs de Lagrange déterminés par la valeur moyenne des charges locales  $\langle Q_i \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}_{\text{GGE},\{Q_j\}} Q_i]$ . Ainsi les pertes atomiques induisent une lente évolution temporelle des charges locales et l'équation (7.4) devient

$$\frac{d}{dt} \langle Q_i \rangle = \Gamma \sum_{j=1}^L \text{Re} \left\langle L_j^\dagger[Q_i, L_j] \right\rangle_{\text{GGE},\{Q_i\}}. \quad (7.6)$$

Cette équation est la base du développement présenté dans ce chapitre. Dans la suite, nous montrons que le fait d'étudier un système de bosons de cœur dure sur réseau permet de simplifier l'équation (7.6), notamment en explicitant la forme des charges locales. Nous nous concentrons sur l'évolution temporelle du nombre de particules et introduisons la distribution de rapidités.

### 7.1.3 Lente évolution de la distribution de rapidité

Il est connu [48, 49] qu'il existe, à une dimension, une correspondance entre un système de bosons de cœur dur et un système de fermions libres sans spin. Le passage des opérateurs bosoniques aux opérateurs fermioniques se fait par la transformation de Jordan-Wigner

$$\sigma_j^+ = \prod_{i=1}^{j-1} (-1)^{c_i^\dagger c_i} c_j^\dagger, \quad \sigma_j^- = \prod_{i=1}^{j-1} (-1)^{c_i^\dagger c_i} c_j, \quad (7.7)$$

où les opérateurs  $c_j^\dagger$  et  $c_j$  créent et annihilent respectivement un fermion sur le site  $j$  et satisfont les relations d'anti commutations canoniques  $\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ . En insérant les relations ci-dessus dans le hamiltonien (7.1), on obtient

$$H_{\text{HCB}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^L (c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j). \quad (7.8)$$

Contrairement au système bosonique pour lequel les conditions de bords sont périodiques, les conditions de bords des fermions dépendent de la parité du nombre de particules  $N$  :

$$c_{L+1}^\dagger = (-1)^{N-1} c_1^\dagger. \quad (7.9)$$

Pour  $N$  pair, les conditions de bords sont anti périodiques alors qu'elles sont périodiques pour  $N$  impair. Cette dépendance des conditions de bords avec la parité de  $N$  introduite

par la transformation de Jordan-Wigner est particulièrement importante dans notre modèle où le nombre de particules est amené à varier. Nous reviendrons plus en détails dans la section suivante.

En introduisant les modes de Fourier des opérateurs fermioniques

$$c^\dagger(k) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{j=1}^L e^{ikj} c_j^\dagger, \quad (7.10)$$

avec  $k \in \frac{2\pi}{L}(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$  si  $N$  est pair et  $k \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$  dans le cas contraire, nous pouvons diagonaliser le hamiltonien (7.1.3)

$$H_{\text{HCB}} = \sum_k \varepsilon(k) c^\dagger(k) \cdot c(k), \quad (7.11)$$

Ici l'énergie à une particule est donnée par  $\varepsilon(k) = -\cos k$ .

La forme du hamiltonien (7.11) permet de construire un jeu d'opérateurs hermitiens qui commutent à la fois avec le hamiltonien  $H_{\text{HCB}}$  et entre-eux

$$Q[f] = \sum_k f(k) c^\dagger(k) c(k), \quad (7.12)$$

avec  $f(k)$  une fonction quelconque de  $k$ . Même s'il est possible d'imposer une forme particulière à  $f(k)$  pour se doter d'une base hermitienne de charges conservées, nous faisons le choix de travailler avec la distribution de rapidité, que l'on définit comme la valeur moyenne du nombre d'occupation pour un système infini

$$\rho(k) \stackrel{L \rightarrow \infty}{=} \langle c^\dagger(k) c(k) \rangle, \quad \rho(k) \in [0, 1]. \quad (7.13)$$

La quantité  $L\rho(k)dk$  compte le nombre de particules dans une bande de largeur  $dk$ . La connaissance de la distribution de rapidité donne directement accès à la valeur moyenne de n'importe quelle charge  $\langle Q[f] \rangle = \sum_k f(k) \rho(k)$ . De l'équation d'évolution d'une charge conservée (7.6) on déduit l'équation d'évolution temporelle lente de la distribution de rapidité

$$\dot{\rho}(k) = -\Gamma F[\rho](k), \quad (7.14)$$

où la fonctionnelle  $F[\rho](k)$ , encodant le phénomène de pertes, est donnée par

$$F[\rho](k) = \sum_{j=1}^L \text{Re} \left\langle L_j^\dagger [L_j, c^\dagger(k) c(k)] \right\rangle_{\text{GGE}, \rho}. \quad (7.15)$$

Ici les charges locales sont des opérateurs quadratiques (voir (7.49)), ce qui fait que la matrice densité du GGE est gaussienne pour les fermions. Sa fonction de corrélation à deux points est  $\langle c^\dagger(k) c(k') \rangle_{\text{GGE}, \rho} = \rho(k) \delta_{k, k'}$  et les corrélations d'ordres supérieurs sont obtenues à l'aide du théorème de Wick. Ce dernier est à la base du calcul de la quantité fondamentale de ce chapitre, la fonctionnelle de perte (7.15). La prochaine section est entièrement dédiée au l'évaluation de la fonctionnelle de perte pour différents processus de pertes.

## 7.2 La fonctionnelle de perte

Cette section détaille le calcul de la fonctionnelle de pertes  $F[\rho](k)$  pour un nombre  $K$  d'atomes retirés du système. Nous donnons explicitement la forme de la fonctionnelle de perte pour les cas  $K = 1$  et  $K = 2$ . Dans le cas général où  $K$  est un nombre arbitraire, nous montrons qu'il est possible de trouver une formule fermée pour la fonctionnelle. Le cas général permet également de mettre en évidence les conséquences de la parité du nombre  $K$  sur la structure de  $F[\rho](k)$ .

### 7.2.1 Cas des pertes à un corps : $K = 1$

Pour les pertes à un corps, les opérateurs de Lindblad sont de la forme  $L_j = \sigma_j^-$ , on détruit alors un boson sur le site  $j$ . Grâce à l'invariance par translation, la fonctionnelle de perte définie en (7.15) se réduit à

$$\begin{aligned} F[\rho](k) &= L \langle \sigma_1^+ [\sigma_1^-, c^\dagger(k)c(k)] \rangle_{\text{GGE},\rho} \\ &= L \langle \sigma_1^+ \sigma_1^- c^\dagger(k)c(k) \rangle_{\text{GGE},\rho} - L \langle \sigma_1^+ c^\dagger(k)c(k) \sigma_1^- \rangle_{\text{GGE},\rho}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

où  $L$  est la longueur du système. Les deux termes apparaissant dans la fonctionnelle de perte sont évalués dans un GGE. Nous avons vu que la transformation de Jordan-Wigner permettait de passer du hamiltonien des bosons de cœur dur à un hamiltonien de fermions libres, qui est quadratique  $H_{\text{FF}} = -\sum_k \cos(k) c^\dagger(k)c(k)$ . Toutes les charges conservées pouvant se mettre sous la même forme, le GGE est un état gaussien. Ainsi, les deux termes de la fonctionnelle de perte (7.16) peuvent être calculés en utilisant le théorème de Wick. En introduisant les modes de Fourier  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_q e^{iq} c(q)$ , le premier terme se réduit à :

$$\begin{aligned} L \langle \sigma_1^+ \sigma_1^- c^\dagger(k)c(k) \rangle_{\text{GGE},\rho} &= L \langle c_1^\dagger c_1 c^\dagger(k)c(k) \rangle_{\text{GGE},\rho} \\ &= \sum_{qq'} e^{i(q-q')} \langle c^\dagger(q')c(q) c^\dagger(k)c(k) \rangle_{\text{GGE},\rho} \\ &= \sum_{qq'} e^{i(q-q')} \langle c^\dagger(q')c(q) \rangle \langle c^\dagger(k)c(k) \rangle + \langle c^\dagger(q')c(k) \rangle \langle c(q)c^\dagger(k) \rangle \\ &= \langle N \rangle \rho(k) + \rho(k)(1 - \rho(k)). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Ce terme est assez simple à traiter dans la mesure où il consiste à calculer la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules dans un état qui contient le même nombre de particules que l'état initial.

Le second terme, quant à lui, n'est autre que la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules prise dans un état ayant perdu une particule. Du fait de l'introduction de la corde de Jordan-Wigner, le changement de parité du nombre de particule engendre une modification des conditions de bords pour les fermions. Ainsi, il existe deux variétés différentes de mode de Fourier chacune vivant dans un secteur de parité différent. Une variété correspond à des conditions de bords périodiques et l'autre à des conditions de

bords anti périodiques. Précisément, nous introduisons deux jeux de modes de Fourier

$$Q^p = \frac{2\pi}{L} \times \{1, 2, \dots, L\}, \quad (7.18)$$

$$Q^{ap} = \frac{2\pi}{L} \times \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, L - \frac{1}{2} \right\}, \quad (7.19)$$

le premier contenant des multiples entiers de  $2\pi/L$  et le second des multiples demi-entiers de  $2\pi/L$ . La relation de passage entre des opérateurs vivant dans deux secteurs de parité différents est donnée par

$$(k \in Q^p) \quad c(k) = \frac{i}{L} \sum_{q \in Q^{ap}} \frac{e^{i(q-k)/2}}{\sin((q-k)/2)} c(q), \quad (7.20)$$

$$(k \in Q^{ap}) \quad c(k) = \frac{i}{L} \sum_{q \in Q^p} \frac{e^{i(q-k)/2}}{\sin((q-k)/2)} c(q). \quad (7.21)$$

En insérant ces relations dans le second terme de Eq. (7.16), on a

$$\langle \sigma_1^+ c^\dagger(k) c(k) \sigma_1^- \rangle = \frac{1}{L^2} \sum_{q, q'} \frac{e^{i(q-q')/2} \langle c_1^\dagger c^\dagger(q') c(q) c_1 \rangle}{\sin((q-k)/2) \sin((q'-k)/2)}. \quad (7.22)$$

La quantité  $\langle c_1^\dagger c^\dagger(q') c(q) c_1 \rangle$  peut alors être calculée à l'aide du théorème de Wick. On obtient alors finalement

$$L \langle \sigma_1^+ c^\dagger(k) c(k) \sigma_1^- \rangle = \frac{\langle N \rangle}{L^2} \sum_q \frac{\rho(q)}{\sin^2(\frac{q-k}{2})} - \left( \frac{1}{L} \sum_q \cot\left(\frac{q-k}{2}\right) \rho(q) \right)^2 - \frac{\langle N \rangle^2}{L^2}. \quad (7.23)$$

Comme nous pouvons le voir, le terme  $\sum_q \frac{\rho(q)}{\sin^2(\frac{q-k}{2})}$  possède un pôle d'ordre deux en  $q = k + 2\pi\mathbb{Z}$ . Il est possible de réduire l'ordre du pôle grâce à l'identité  $\sum_q 1/\sin^2(\frac{q-k}{2}) = L^2$  et d'obtenir ainsi un pôle simple :

$$L \langle \sigma_1^+ c^\dagger(k) c(k) \sigma_1^- \rangle = \frac{\langle N \rangle}{L^2} \sum_q \frac{\rho(q) - \rho(k)}{\sin^2(\frac{q-k}{2})} + \langle N \rangle \rho(k) - \left( \frac{1}{L} \sum_p \cot\left(\frac{p-k}{2}\right) \rho(p) \right)^2 - \frac{\langle N \rangle^2}{L^2}. \quad (7.24)$$

En prenant la limite thermodynamique  $L \rightarrow \infty$ , l'addition des deux termes (7.17) et (7.24) conduit à écrire la fonctionnelle pour les pertes à un corps comme

$$F[\rho](k) = \rho(k) - \rho^2(k) + \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{2\pi} \cot\left(\frac{k-p}{2}\right) \rho(p) \right)^2 + n \left( n + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \frac{\rho(k) - \rho(q)}{\sin^2(\frac{k-q}{2})} \right), \quad (7.25)$$

où nous avons introduit la densité moyenne de particule  $n = \langle N \rangle / M$  et la notation  $\mathcal{f}$  pour désigner la valeur principale de Cauchy de l'intégrale. En introduisant la transformée de Hilbert définie par  $\mathcal{H}(f(k)) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{2\pi} \cot(\frac{k-p}{2}) f(p)$ , avec  $f(k)$  une fonction périodique, nous pouvons rendre l'expression (7.25) davantage compacte

$$F[\rho](k) = \rho(k) - (\rho^2(k) - n^2 - \mathcal{H}^2(\rho(k))) + 2n \mathcal{H}'(\rho(k)), \quad (7.26)$$



le terme  $\mathcal{H}'(\rho(k))$  désignant la dérivée de la transformée de Hilbert. Ce dernier résultat est la version sur réseau de celui trouvé dans la Ref. [34], où l'étude portait sur le gaz de Tonks-Girardeau continu. Bien que différents, ces résultats partagent des propriétés similaires comme la non linéarité avec  $\rho(k)$  ainsi que la non localité dans l'espace des rapidités (l'information sur le mode  $k$  dépend de tous les autres modes  $q$ ).

### 7.2.2 Cas des pertes à deux corps : $K = 2$

Nous détaillons à présent le cas des pertes à deux corps. Ici les opérateurs de Lindblad sont donnés par  $L_j = \sigma_j^- \sigma_{j+1}^-$ . En termes d'opérateurs fermioniques, la transformation de Jordan-Wigner fournit l'expression suivante

$$L_j = \sigma_j^- \sigma_{j+1}^- = c_j (-1)^{c_j^\dagger c_j} c_{j+1} = c_j c_{j+1}. \quad (7.27)$$

En insérant cette relation dans la définition de la fonctionnelle de perte, on obtient alors

$$\begin{aligned} F[\rho](k) &= \sum_j \langle \sigma_{j+1}^+ \sigma_j^+ [\sigma_j^- \sigma_{j+1}^-, c^\dagger(k) c(k)] \rangle \\ &= \sum_{q, q', p, p'} \frac{e^{i(2p' + p - 2q - q')}}{L} \langle c^\dagger(q) c^\dagger(q') [c(p) c(p'), c^\dagger(k) c(k)] \rangle. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Il ne reste plus qu'à développer le commutateur. Ce dernier donne deux termes

$$\begin{aligned} \langle c^\dagger(q) c^\dagger(q') [c(p) c(p'), c^\dagger(k) c(k)] \rangle &= \langle c^\dagger(q) c^\dagger(q') c(p) c(p') c^\dagger(k) c(k) \rangle \\ &\quad - \langle c^\dagger(q) c^\dagger(q') c^\dagger(k) c(k) c(p) c(p') \rangle, \end{aligned} \quad (7.29)$$

qu'il convient de commenter avant de les calculer. Le premier terme est la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particule dans un état à  $N$  particules tandis que le second terme correspond à la moyenne de ce même opérateur dans un état à  $N - 2$  particules. Ces deux termes conservent donc la parité du nombre de particule initial  $N$ . Par conséquent, on peut calculer ces termes sans se soucier du changement des conditions de bords, contrairement au cas des pertes à un corps. En appliquant les relations d'anti-commutations fermioniques usuelles, le premier terme s'écrit

$$\begin{aligned} \langle c^\dagger(q) c^\dagger(q') c(p) c(p') c^\dagger(k) c(k) \rangle &= \langle c^\dagger(q) c^\dagger(q') c^\dagger(k) c(k) c(p) c(p') \rangle \\ &\quad + \delta_{p'k} \langle c^\dagger(q) c^\dagger(q') c(p) c(k) \rangle - \delta_{pk} \langle c^\dagger(q) c^\dagger(q') c(p') c(k) \rangle. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Un fois injectée dans l'expression de la fonctionnelle (7.28), on peut utiliser le théorème de Wick. Dans la limite thermodynamique, la fonctionnelle est donnée par

$$F[\rho](k) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq \sin^2 \left( \frac{k - q}{2} \right) \rho(q) \rho(k). \quad (7.31)$$

Cette fonctionnelle est très proche de celle trouvée dans la Réf. [37] (formule (5)). Nous reviendrons dans la prochaine section sur ces similitudes.

### 7.2.3 Généralisation aux pertes paires

Dans cette sous-section nous reprenons la méthode déployée pour les cas  $K = 1$  et  $K = 2$  et nous l'étendons au cas général des pertes paires.

Ici les opérateurs de Lindblad s'écrivent  $L_j = b_j b_{j+1} \dots b_{j+K-1}$  avec  $K$  pair et la fonctionnelle de perte définie en (7.15) prend alors la forme

$$F^{\text{even}}[\rho](k) = \frac{1}{L^{K-1}} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_K \\ q'_1, \dots, q'_K}} \exp \left\{ i \sum_{l=1}^K (q_l - q'_l) l \right\} \langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) [c(q_1) \dots c(q_K), c^\dagger(k) c(k)] \rangle, \quad (7.32)$$

où nous avons directement pris la transformée de Fourier des opérateurs de Lindblad. Comme nous voulons retirer un nombre pair de bosons, la stratégie est ici identique à celle utilisée pour le cas  $K = 2$ . La parité du nombre de particule étant conservée, le commutateur présent dans la formule (7.32) se simplifie à l'aide des relations d'anti commutation

$$\begin{aligned} \langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) [c(q_1) \dots c(q_K), c^\dagger(k) c(k)] \rangle &= \delta_{kq_K} \langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) c(q_1) \dots c(q_{K-1}) c(k) \rangle \\ &- \delta_{kq_{(K-1)}} \langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) c(q_1) \dots c(q_{K-2}) c(q_K) c(k) \rangle + \dots \end{aligned} \quad (7.33)$$

Pour chacun des termes de la relation ci-dessus, le théorème de Wick conduit à un produit de  $K$  termes du type  $\langle c^\dagger(q') c(q) \rangle$ , ces termes pouvant s'écrire  $\langle c^\dagger(q') c(q) \rangle = \delta_{qq'} \rho(q)$ . Après avoir pris la limite thermodynamique, la fonctionnelle (7.32) peut se mettre sous la forme d'une somme de  $K$  déterminants de matrice  $K \times K$

$$F^{\text{pair}}[\rho](k) = \sum_{j=1}^K \det \left( A_{[\rho]}^{(j)} \right). \quad (7.34)$$

L'expression (7.34) est l'un des résultats majeurs de cette étude. Nous avons introduit la matrice  $A_{[\rho]}^{(j)}$  dont les éléments sont donnée par

$$[A_{[\rho]}^{(j)}]_{ab} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq e^{i(b-a)q} \rho(q) & \text{si } b \neq j \\ e^{i(b-a)k} \rho(k) & \text{si } b = j, \end{cases} \quad (7.35)$$

avec les indices  $a, b = 1, \dots, K$  et l'exposant  $j$  qui indique la dépendance en  $k$  de la  $j^{\text{ème}}$  colonne. En dehors la colonne  $j$ , cette matrice contient essentiellement les transformées de Fourier de la distribution de rapidités.

### 7.2.4 Généralisation au cas des pertes impaires

Pour terminer cette section, nous traitons maintenant le cas des pertes impaires. La démarche reste identique à celle de la sous-section précédente, mais il faut cette fois-ci tenir compte du changement de conditions de bords induit par la perte d'un nombre impair de fermions, comme dans le cas  $K = 1$ . Nous reprenons la formule (7.32) et étudions le commutateur  $\langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) [c(q_1) \dots c(q_K), c^\dagger(k) c(k)] \rangle$ . Ce dernier donne deux termes une fois développé

$$\begin{aligned} \langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) [c(q_1) \dots c(q_K), c^\dagger(k) c(k)] \rangle &= \langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) c(q_1) \dots c(q_K) c^\dagger(k) c(k) \rangle \\ &- \langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) c^\dagger(k) c(k) c(q_1) \dots c(q_K) \rangle. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Le premier terme correspond à la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particule  $c^\dagger(k)c(k)$  dans un état conservant le nombre de particules initial. En revanche, le second terme constitue la valeur moyenne de  $c^\dagger(k)c(k)$  dans un état qui a perdu  $K$  particules. Comme ici  $K$  est impair, il est donc nécessaire d'utiliser les relations de passage (7.20) pour transposer l'opérateur  $c^\dagger(k)c(k)$  dans le secteur de parité adéquat. Grâce aux relations (7.20) le second terme devient

$$\begin{aligned} & \langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) c^\dagger(k) c(k) c(q_1) \dots c(q_K) \rangle \\ &= \sum_{q, q'} \frac{e^{i(q-q')/2} \langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) c^\dagger(q') c(q) c(q_1) \dots c(q_K) \rangle}{L^2 \sin((q-k)/2) \sin((q'-k)/2)}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Nous pouvons à présent appliquer le théorème de Wick après avoir simplifié le premier terme du membre de droite de (7.36) à l'aide des relations d'anti commutation

$$\begin{aligned} \langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) c(q_1) \dots c(q_K) c^\dagger(k) c(k) \rangle &= \langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) c^\dagger(k) c(k) c(q_1) \dots c(q_K) \rangle \\ &+ \delta_{kq_K} \langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) c(q_1) \dots c(q_{K-1}) c(k) \rangle \\ &- \delta_{kq_{K-1}} \langle c^\dagger(q'_K) \dots c^\dagger(q'_1) c(q_1) \dots c(q_{K-2}) c(q_K) c(k) \rangle \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (7.38)$$

De manière analogue au cas  $K$  pair, les contractions de Wick des termes (7.37) et (7.38) peuvent s'écrire, pour chaque terme, comme le déterminant d'une matrice hermitienne de taille  $(K+1) \times (K+1)$ . Nous nommons  $B_{[\rho]}$  et  $C_{[\rho]}$  les matrices correspondants respectivement au terme (7.37) et (7.38). Leurs éléments de matrice sont donnés par

$$[B_{[\rho]}]_{ab} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq e^{i(b-a)q} \rho(q) & \text{if } a, b < K+1 \\ e^{-iak} \rho(k) & \text{if } b = K+1 \\ 0 & \text{if } a = b = K+1 \end{cases} \quad (7.39)$$

et

$$[C_{[\rho]}]_{ab} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq e^{i(b-a)q} \rho(q) & \text{si } a, b < K+1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq e^{-i(a-1)q} \rho(q) \left( \cot\left(\frac{k-q}{2}\right) + i \right) & \text{si } b = K+1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq \frac{\rho(q) - \rho(k)}{\sin^2\left(\frac{k-q}{2}\right)} & \text{si } a = b = K+1. \end{cases} \quad (7.40)$$

La matrice  $B_{[\rho]}$  contient majoritairement les transformées de Fourier de la distribution de rapidité, similairement à la matrice  $A_{[\rho]}$ . La matrice  $C_{[\rho]}$  est en tout point similaire à la matrice  $B_{[\rho]}$ , seules diffèrent la dernière ligne et la dernière colonne, qui contiennent des termes faisant intervenir la transformée de Hilbert de  $\rho(k)$  et de ses transformées de Fourier, ainsi que la dérivée de la transformée de Hilbert. Finalement, la fonctionnelle de perte pour  $K$  impair est donnée par

$$F_K^{\text{odd}}[\rho](k) = \left( \sum_{j=1}^K \det\left(A_{[\rho]}^{(j)}\right) \right) + [\det(B_{[\rho]}) - \det(C_{[\rho]})]. \quad (7.41)$$

Comme on le voit, la fonctionnelle des pertes impaires (7.41) dépend explicitement de la fonctionnelle des pertes paires (7.34) et les effets caractéristiques des pertes impaires

sont contenus dans les matrices  $B_{[\rho]}$  et  $C_{[\rho]}$ . Ainsi, en introduisant le facteur  $\frac{1 - (-1)^K}{2}$  on peut écrire une expression générale pour la fonctionnelle de perte à  $K$  corps, où  $K$  est un nombre arbitraire

$$F_K[\rho](k) = \left( \sum_{j=1}^K \det(A_{[\rho]}^{(j)}) \right) + \frac{1 - (-1)^K}{2} [\det(B_{[\rho]}) - \det(C_{[\rho]})]. \quad (7.42)$$

Cette dernière expression est un autre résultat fondamental de ce manuscrit.

## 7.3 Évolution temporelle de la distribution de rapidités et de la densité de particule

Nous arrivons maintenant au cœur de ce projet sur les pertes atomiques. Le but de cette section est de résoudre l'équation d'évolution de la distribution de rapidités

$$\dot{\rho}(k) = -\Gamma F[\rho](k) \quad (7.43)$$

dans laquelle apparaît la fonctionnelle de perte  $F[\rho]$ . Cette dernière a été déterminée dans la section précédente pour le cas des pertes à un corps (7.25) et à deux corps (7.31). Dans le cas général des pertes à  $K$  corps, nous avons également établi une relation fermée (7.42) pour la fonctionnelle de perte, qui contient à la fois le cas  $K$  pair (7.34) et le cas  $K$  impair (7.41). Dans ce qui suit, nous montrons qu'il est possible de trouver une solution analytique à l'équation (7.43) pour  $K = 1$  et  $K = 2$ . Au delà de  $K = 2$ , l'évolution temporelle de la distribution de rapidités est obtenue numériquement. La connaissance de  $\rho(k)$  à chaque instant permet d'accéder à l'évolution de la densité moyenne de particules grâce à la relation  $n = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(k) \frac{dk}{2\pi}$ .

### 7.3.1 Effet des pertes à un corps

L'équation d'évolution de la distribution de rapidités s'écrit ici comme

$$\dot{\rho}(k) = -\Gamma (\rho(k) - (\rho^2(k) - n^2 - \mathcal{H}^2(\rho(k))) + 2n \mathcal{H}'(\rho(k))). \quad (7.44)$$

On constate que le membre de droite dépend de la densité moyenne de particules  $n(t)$ , qui décroît de manière exponentielle

$$n(t) = n(0)e^{-\Gamma t}. \quad (7.45)$$

Ceci est une conséquence de la relation (7.4) et de notre choix d'opérateurs de Lindblad  $L_j = \sigma_j^-$ . En effet, l'évolution du nombre de particules  $\langle Q_0 \rangle = \langle N \rangle = \sum_i \langle \sigma_i^+ \sigma_i^- \rangle$  sous l'effet des pertes atomiques est donnée par

$$\langle \dot{N} \rangle(t) = \Gamma \sum_{ij} \text{Re} \langle \sigma_j^+ [\sigma_i^+ \sigma_i^-, \sigma_j^-] \rangle(t). \quad (7.46)$$

Le commutateur se calcule simplement en invoquant l'identité  $[\sigma_i^+ \sigma_i^-, \sigma_j^-] = \sigma_i^+ [\sigma_i^-, \sigma_j^-] + [\sigma_i^+, \sigma_j^-] \sigma_i^-$  et conduit à l'équation suivante

$$\langle \dot{N} \rangle = -\Gamma \langle N \rangle, \quad (7.47)$$

dont la solution est bien l'exponentielle décroissante. Le fait de connaître la forme de la densité moyenne de particule permet de résoudre analytiquement l'équation (7.44). Pour ce faire, nous utilisons une méthode analogue à celle employée dans la référence [34] conduisant à la solution

$$\rho(t, k) = n_0 e^{-\Gamma t} \operatorname{Re} \left( \frac{\tanh(n_0(e^{-\Gamma t} - 1)) + \frac{i}{n_0} I(t, k)}{1 + \frac{i}{n_0} \tanh(n_0(e^{-\Gamma t} - 1)) I(t, k)} \right), \quad (7.48)$$

où  $\rho_0(k) = \rho(t = 0, k)$  est la distribution de rapidité initiale et  $I(t, k)$  une intégrale définie par

$$I(t, k) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \frac{\rho_0(q)}{\tan\left(\frac{k-q}{2} + in_0(1 - e^{-\Gamma t})\right)}. \quad (7.49)$$

L'intégrale  $I(t, k)$  (et par extension la distribution de rapidité  $\rho(k, t)$ ) dépend de la distribution de rapidité initiale  $\rho_0(k)$ . Nous notons que la solution (7.48) partage quelques similitudes avec celle trouvée dans la référence [34] pour le gaz de Tonks-Girardeau continu. L'effet des pertes à un corps sur la distribution de rapidité est illustré dans la figure 7.2 pour des distributions initiales thermiques.

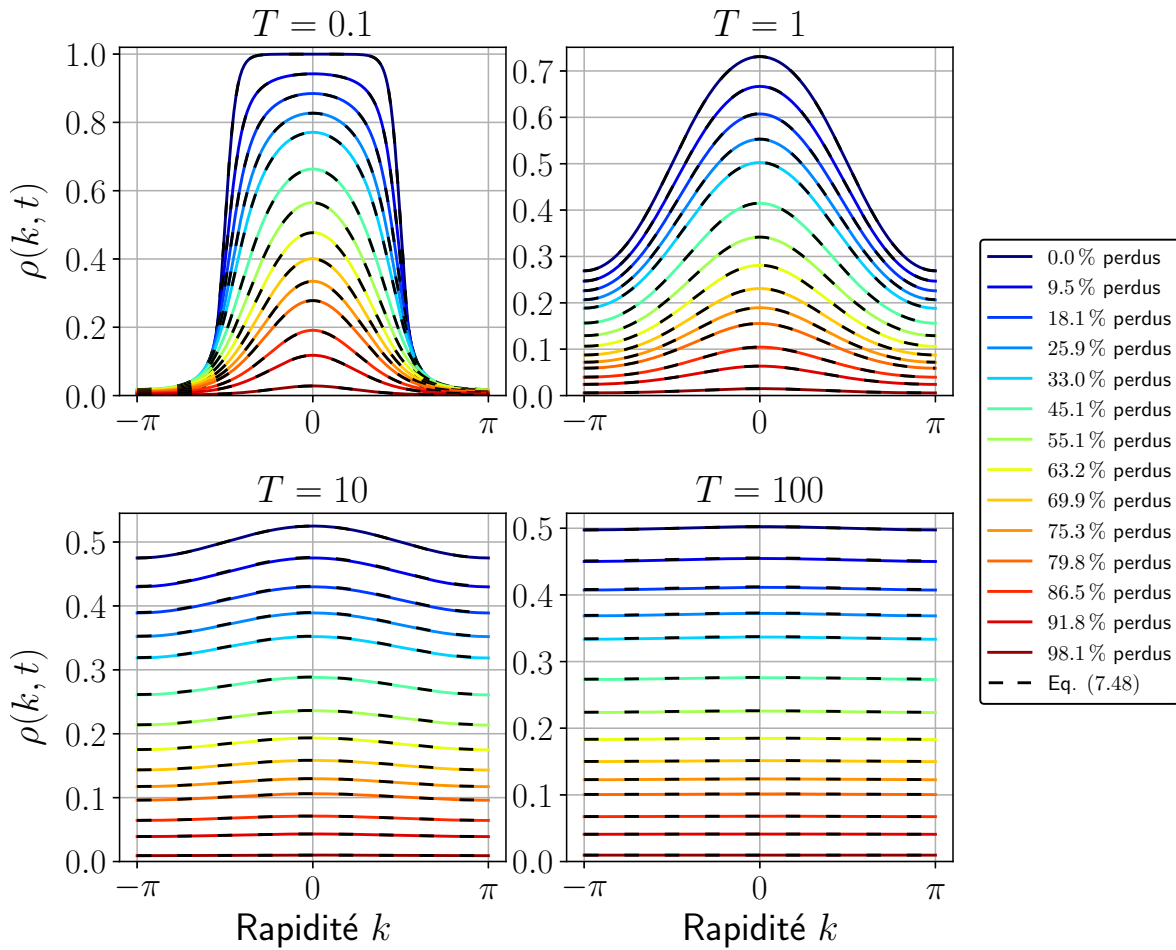


FIGURE 7.2 – Effets des pertes à un corps sur différentes distributions de rapidité. A l’instant initial les distributions de rapidité sont données par une distribution de Fermi-Dirac  $\rho_0(k) = (1 + \exp\{-\cos(k)/T\})^{-1}$  où  $T$  est la température. Les courbes colorées sont issues de la résolution numérique de l’équation (7.44) avec la méthode de Runge-Kutta et la courbe en pointillés noirs est la solution analytique (7.48). L’accord entre les résultats numériques et analytiques est parfait même quand il ne reste presque plus d’atomes dans le système.

Comme on le voit sur la figure 7.2, les pertes à un corps provoquent un étalement de la distribution de rapidité dans l’espace des  $k$ . Pour une distribution initialement plate, correspondant à un état de température infinie, la distribution reste plate, même lorsque le système a perdu la quasi totalité de ses particules. Cette figure montre également que notre solution analytique (7.48) est en parfait accord avec les résultats issus de la résolution numérique de (7.44). Enfin, nous constatons que pour des distributions thermiques à  $T$  fini, la forme de la distribution de rapidité s’adoucit autour de  $k = 0$  et devient similaire à une distribution de Boltzmann, ce qui signifierait que le système évolue bien vers un état thermique (au sens de Gibbs). Pour étudier le comportement aux temps longs de la distribution de rapidité (7.48), nous introduisons le rapport  $\rho(k, t)/n(t)$  et prenons sa limite quant  $t \rightarrow \infty$ . La figure (...) montre l’allure du rapport  $\rho(k, t)/n(t)$  pour une distribution initialement thermique. On remarque alors qu’à temps longs, le rapport est assez proche d’une distribution de Boltzmann, comme suggéré par le fit numérique. Toutefois,

nous pouvons montrer, en partant des relations (7.48)-(7.49), que la distribution de rapidité n'évolue pas vers un état thermique en général. Pour illustrer cette assertion, nous considérons une distribution de rapidité initiale oscillante  $\rho_0(k) = (1 - \cos(sk))/2$ , où  $s$  est la fréquence des oscillations. Avec ce choix, il est possible de calculer analytiquement l'intégrale (7.49) quand  $t \rightarrow \infty$ . En passant dans le plan complexe, l'intégrale vaut

$$\frac{i}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq \frac{1 - \cos(sq)}{\tan(\frac{z-q}{2})} = \frac{1 - e^{-2sn_0} e^{iks}}{2}, \quad (7.50)$$

avec  $z = k + i2n_0$ . En injectant ce résultat dans la solution (7.48), on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(k, t) = \frac{\alpha + \beta \cos(sk)}{\gamma + \delta \cos(sk)}. \quad (7.51)$$

Les quantités  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des fonctions de la densité moyenne de particule à l'instant initial  $n_0$  et de la fréquence  $s$ . La relation (7.51) met en évidence l'absence de relaxation vers un état thermique lorsque la distribution de rapidité initiale n'est pas thermique. Ceci est illustré dans la figure Fig. (7.3) où l'on voit que la distribution de rapidité à longs temps garde la forme de la distribution à l'instant initiale. Nous arrivons donc à la conclusion que la distribution de rapidité n'évolue pas vers une distribution thermique sous l'effet des pertes à un corps.

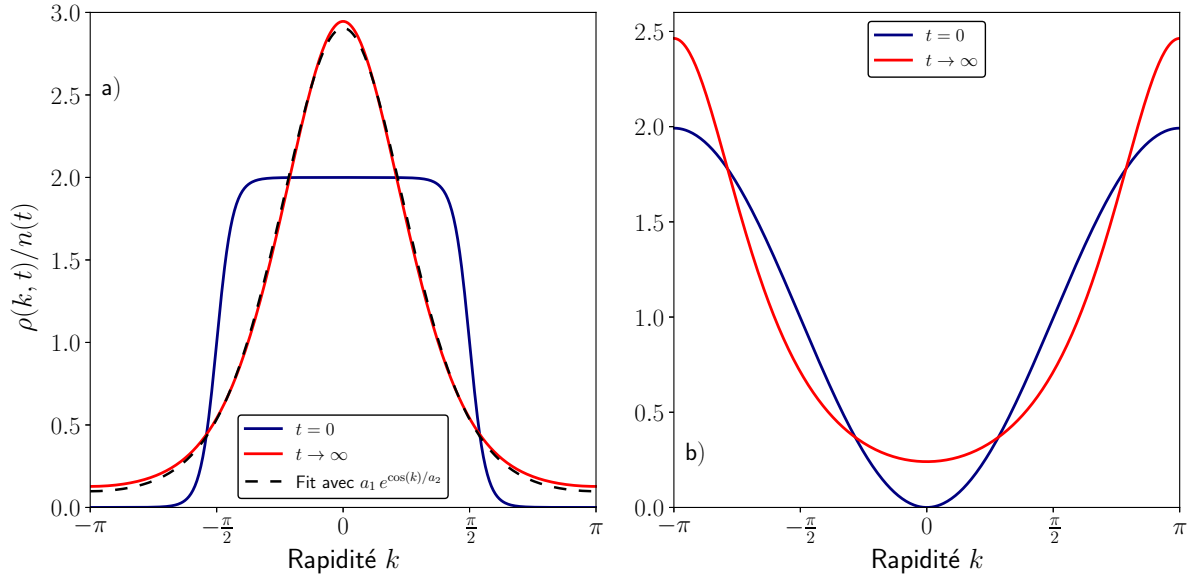


FIGURE 7.3 – Comportement aux temps longs du rapport  $\rho(k, t)/n(t)$  pour différentes distributions initiales. a) En bleu, la distribution initiale prise comme une distribution de Fermi-Dirac  $\rho_0(k) = (1 + \exp(-\cos(k)/T))^{-1}$  avec une température  $T=0.1$ . En rouge, l'allure de la distribution quand  $t \rightarrow \infty$  obtenue avec la solution analytique (7.48). La courbe en pointillés noirs représente un fit numérique avec une distribution de Boltzmann  $a_1 \exp\{\cos(k)/a_2\}$ . b) En bleu, la distribution initiale prise comme une distribution non thermique  $\rho_0(k) = (1 - \cos(sk))/2$ . En rouge la distribution à des temps infinis. Cette dernière est clairement incompatible avec état thermique.

### 7.3.2 Effet des pertes à deux corps

Nous traitons ici les effets des pertes à deux corps sur la distribution de rapidité et sur la densité moyenne de particule. Nous considérons l'équation d'évolution de la distribution

de rapidité suivante

$$\dot{\rho}(k, t) = -\frac{2\Gamma}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq \sin^2\left(\frac{k-q}{2}\right) \rho(q) \rho(k), \quad (7.52)$$

où le second membre de l'équation est la fonctionnelle de pertes pour  $K = 2$  (voir (7.31)). Avec cette fonctionnelle, la résolution analytique de l'équation n'est pas possible. Cependant, en faisant le choix d'étudier une distribution de rapidité initiale  $\rho_0(k)$  paire, on peut simplifier l'expression de la fonctionnelle de pertes et résoudre la dynamique de la distribution de rapidité de manière analytique. Ainsi, l'équation d'évolution (7.52) est elle aussi invariante sous la transformation  $k \rightarrow -k$ , ce qui assure la conservation de cette propriété de symétrie au cours du temps. En utilisant l'identité trigonométrique  $\left(\sin\left(\frac{k-q}{2}\right)\right)^2 = \frac{1-\cos(k-q)}{2}$  et l'invariance sous  $k \rightarrow -k$ , la fonctionnelle  $F[\rho]$  s'écrit

$$F[\rho] = 2\rho(k) n(t) - \frac{1}{\pi} \cos(k) \rho(k) \int_{-\pi}^{\pi} dq \cos(q) \rho(q). \quad (7.53)$$

La fonctionnelle de perte ne contient plus que des termes pairs en  $k$  et est composée de deux termes aux propriétés distinctes. Le premier terme du membre de droite est une contribution de champ moyen n'introduisant aucune structure dans l'espace des  $k$ . Le second terme en revanche couple les modes  $k$  et  $q$  et est la source de corrélations quantiques. De plus ce second terme introduit une structure dans l'espace des rapidités.

En intégrant l'équation (7.52) sur  $k$ , on obtient l'équation d'évolution de la densité moyenne de particule

$$\dot{n}(t) = -2\Gamma \left( n^2(t) - \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq \cos(q) \rho(q) \right)^2 \right), \quad (7.54)$$

qui contient le premier mode de Fourier de  $\rho(k, t)$  :  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq \cos(q) \rho(q)$ . A partir de cette dernière équation et en suivant la démarche de l'appendice B, on peut trouver la solution formelle de l'équation d'évolution de la distribution de rapidité (7.52)

$$\rho(k, t) = \rho_0(k) \times \exp \left\{ -2\Gamma \int_0^t \left( 1 - \sigma \cos(k) \sqrt{1 + \frac{\partial_\tau n(\tau)}{2\Gamma n(\tau)^2}} \right) n(\tau) d\tau \right\}, \quad (7.55)$$

avec  $\sigma = \text{sgn} \left( \int_{-\pi}^{\pi} dq \cos(q) \rho_0(q) \right)$  et  $\text{sgn}(x)$  la fonction signe. On constate que la distribution de rapidité  $\rho(k, t)$  dépend explicitement de  $\rho_0(k)$  et de  $n(t)$ , de manière similaire à ce que nous avons trouvé pour le cas  $K = 1$ .



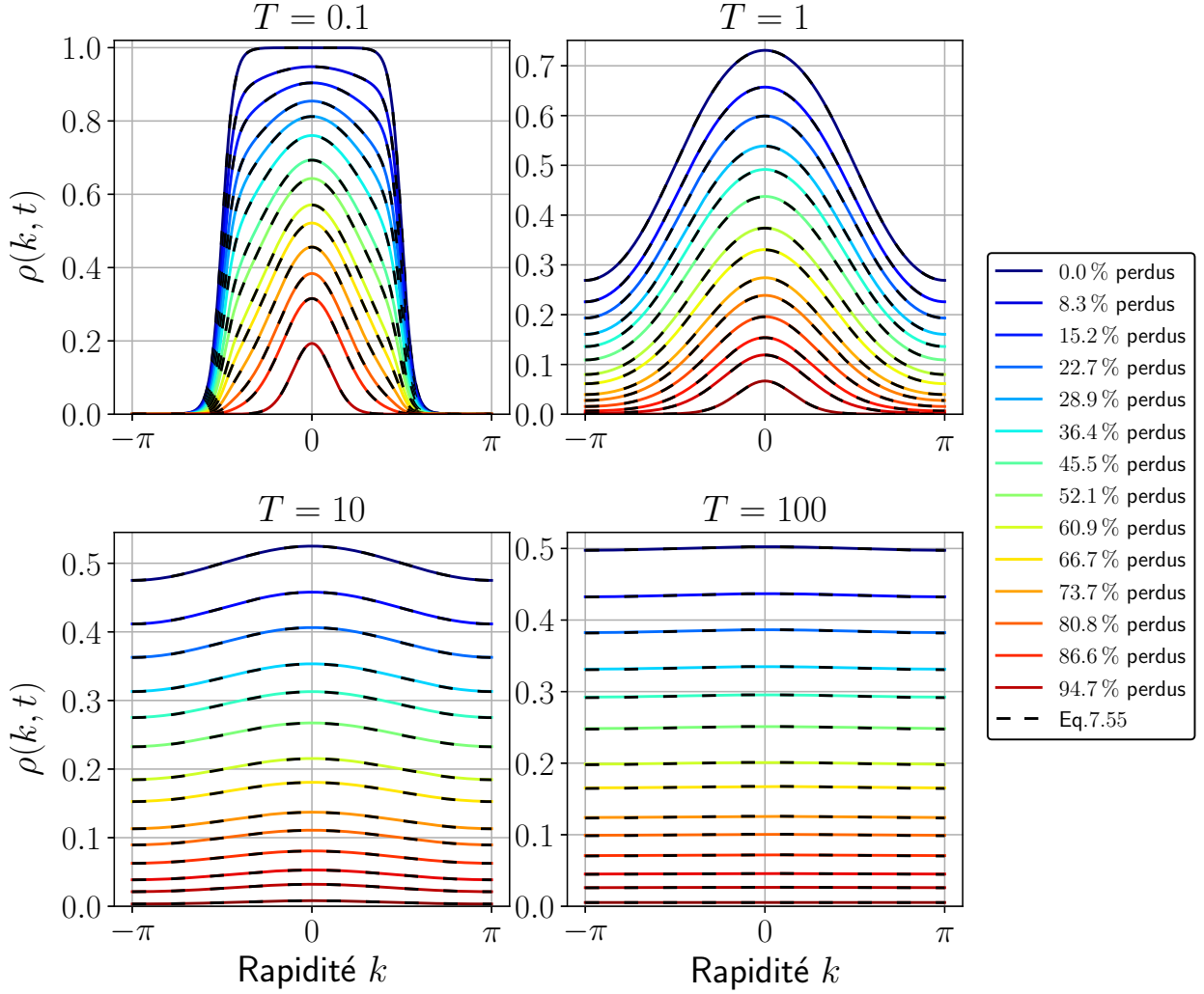


FIGURE 7.4 – Effets des pertes à deux corps sur différentes distributions de rapidité. A l’instant initial les distributions de rapidité sont données par une distribution de Fermi-Dirac  $\rho_0(k) = (1 + \exp\{-\cos(k)/T\})^{-1}$  où  $T$  est la température. Les courbes colorées sont issues de la résolution numérique de l’équation (7.52) avec la méthode de Runge-Kutta et la courbe en pointillés noirs est la solution analytique (7.55). Là encore le numérique est en parfait accord avec la prédiction analytique.

Le comportement aux temps longs de la densité moyenne de particule est directement relié au premier mode de Fourier de la distribution de rapidité initiale. Dans le cas où la distribution de rapidité initiale ne possède pas de premier mode de Fourier, l’équation (7.54) ne conserve que le terme de champ moyen et conduit à la solution

$$n(t) = \frac{1}{1 + 2n(0)\Gamma t}, \quad (7.56)$$

dont la décroissance aux temps longs est bien en  $\sim 1/t$ . Cette loi de puissance caractérise de manière universelle l’absence du premier mode de Fourier de la distribution de rapidité initiale.

A contrario, la décroissance en  $\sim 1/\sqrt{t}$  témoigne d’un premier mode de Fourier non nul. Pour prouver cela, nous étudions la limite quand  $t$  tend vers l’infini de la solu-

tion (7.55). Par souci de clarté, nous introduisons deux fonctions dépendantes du temps :  $g(t) = \int_0^t n(\tau) d\tau$  et  $f(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \frac{\partial_\tau n(\tau)}{2\Gamma n(\tau)^2}} n(\tau) d\tau$ . On peut montrer numériquement que la condition  $\partial_\tau n(\tau) \ll 2\Gamma n(\tau)^2$  est toujours vérifiée si et seulement si la distribution de rapidité initiale possède un premier mode de Fourier non nul. La conséquence est que l'on peut développer en série de Taylor la fonction  $f(t)$  et ainsi l'écrire au premier ordre

$$f(t) = g(t) + \frac{1}{4\Gamma} \ln\left(\frac{n(t)}{n_0}\right). \quad (7.57)$$

On voit que la fonction  $f(t)$  ne diffère de  $g(t)$  qu'à  $\ln(t)$  près pour des temps longs. La densité moyenne de particule se déduit de (7.55) par intégration sur  $k$

$$n(t) = \frac{e^{-2\Gamma g(t)}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \rho_0(k) e^{2\Gamma \sigma \cos(k) f(t)}. \quad (7.58)$$

L'intégrale peut s'évaluer à l'aide de la méthode du point de selle dans la mesure où la fonction  $f(t)$  tend vers l'infini pour  $t \rightarrow \infty$ . Le point de selle change selon le signe de  $\sigma$ , si  $\sigma = +1$  alors le point de selle correspond au point pour lequel  $\cos(k)$  atteint sa valeur maximale  $k_+ = 0$  alors que si  $\sigma = -1$  le point de selle est  $k_- = \pm\pi$ , soit les points où  $\cos(k)$  atteint sa valeur minimale. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} dk \rho_0(k) e^{2\Gamma \sigma \cos(k) f(t)} &\underset{t \rightarrow \infty}{\simeq} e^{2\Gamma f(t)} \int_{-\pi}^{\pi} dk \rho_0(k_{\pm}) e^{-\Gamma (k-k_{\pm})^2 f(t)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\Gamma f(t)}} \rho_0(k_{\pm}) e^{2\Gamma f(t)}. \end{aligned} \quad (7.59)$$

En injectant ce résultat dans la relation (7.3.2) et utilisant le développement (7.57), on peut écrire, à l'ordre dominant, la densité moyenne de particule comme :

$$n(t) = \partial_t g(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{\partial_t g(t)}{\Gamma g(t)}} \frac{\rho_0(k_{\pm})}{\sqrt{4\pi n_0}}. \quad (7.60)$$

Cette dernière expression constitue une équation différentielle pour la fonction  $g(t)$  dont la solution donne  $g(t) \propto \sqrt{t}$ , ce qui entraîne conformément à la relation  $n(t) = \partial_t g(t)$  :

$$n(t) \propto t^{-1/2}, \quad (7.61)$$

qui est bien le comportement observé dans la figure Fig. (7.5). Pour préciser davantage l'importance du premier mode de Fourier de la distribution de rapidité initiale dans le comportement aux temps longs de la densité de particule, nous étudions dans l'appendice C le premier mode de Fourier de différentes distributions thermiques en fonction de la température.

D'autres travaux portant sur des pertes à deux corps dans un gaz de bosons sur réseau [37] et son pendant continu [38] aboutissent à la même loi de puissance pour le comportement asymptotique de la densité moyenne de particule, alors que les fonctionnelles de pertes et les équations d'évolutions y sont différentes des nôtres.

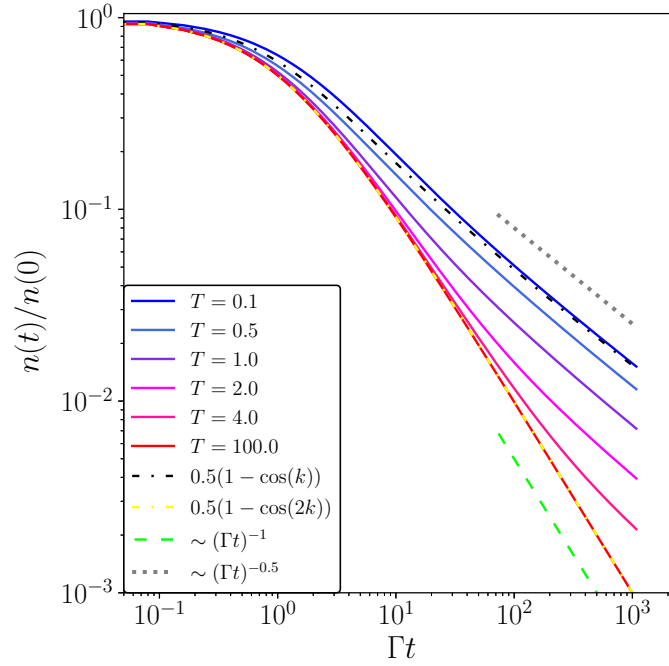


FIGURE 7.5 – Evolution temporelle de la densité moyenne de particules sous l’effet des pertes à deux corps pour différentes distributions de rapidité. Les courbes pleines représentent le ratio  $n(t)/n(0)$  pour des distributions initiales thermiques tandis que les courbes en pointillés noirs et jaunes sont obtenues avec des distributions non thermiques ayant respectivement un premier mode de Fourier non nul et pas de premier mode de Fourier. Le comportement au temps long est comparé avec les valeurs théoriques (7.56) où  $n(t) \sim 1/t$  (pointillés verts) pour des distributions sans premier mode de Fourier et (7.61) où  $n(t) \sim 1/\sqrt{t}$  (pointillés gris) pour des distributions avec un premier mode de Fourier non nul.

Intéressons nous à présent au comportement à longs temps de la distribution de rapidité (7.55). Plaçons nous dans un premier temps dans le cas où la distribution de rapidité initiale ne possède pas de premier mode de Fourier. Dans ce cas la densité moyenne est donnée par (7.56) et  $f(t) = 0$ , ainsi la distribution de rapidité se réduit à

$$\rho(k, t) = \rho_0(k) n(t)/n(0). \quad (7.62)$$

On constate que le rapport  $\rho(k, t)/n(t)$  est ici indépendant du temps, ce qui est bien ce qu’on observe dans la figure Fig. (7.6)-c).

Dans le cas où la distribution de rapidité initiale possède un premier mode de Fourier non nul, la distribution de rapidité évolue vers une distribution de Boltzmann de faible température et de faible densité. En effet, le rapport  $\rho(k, t)/n(t)$  est de la forme  $e^{\beta(t) \cos k}$  où  $\beta(t) = 2\Gamma\sigma f(t)$  est une quantité effective correspondant à l’inverse d’une température. Il est à noter que  $\beta(t)$  dépend de la quantité  $\sigma$  et peut donc être positif ou négatif selon le signe du premier mode de Fourier de la distribution de rapidité initiale. De plus, le rapport  $\rho(k, t)/n(t)$  prend la forme de pics de Dirac centrés autour des points de selle de l’intégrale apparaissant dans la densité moyenne de particule, à mesure que  $t \rightarrow \infty$ . Cette propriété est corroborée par l’observation numérique (voir figure Fig. (7.6)-a)-b)). On en conclut que les pertes à deux corps induisent une évolution vers un état thermique, si le premier mode de Fourier de la distribution de rapidité est non nul.

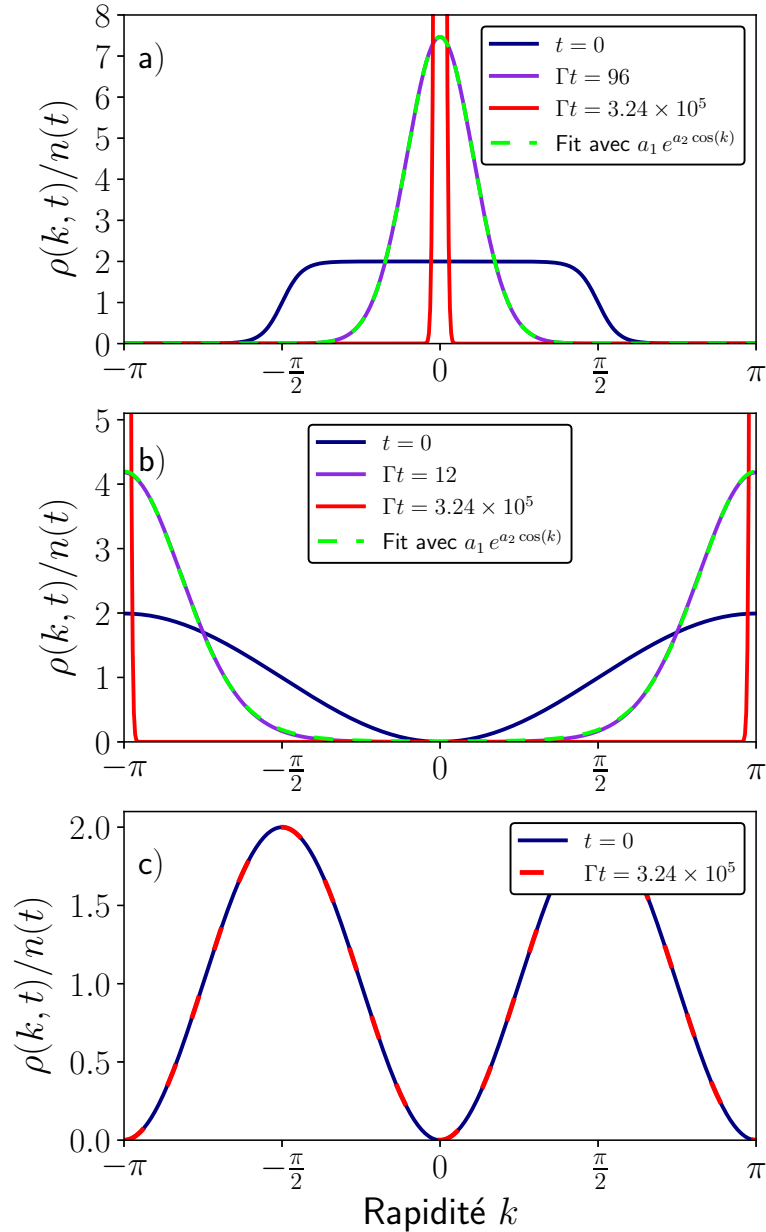


FIGURE 7.6 – Comportement aux temps longs de différentes distributions de rapidité normalisées par la densité correspondante sous l’effet des pertes à trois corps. Les courbes bleues représentent le rapport  $\rho(k, 0)/n(0)$ , soit la distribution de rapidité initiale. Les courbes rouges donnent l’allure de la distribution de rapidité aux temps longs. Les courbes violettes correspondent aux distributions de rapidité à des temps intermédiaires. a) La distribution de rapidité initiale est une distribution de Fermi-Dirac donnée par  $\rho_0(k) = (1 + \exp(-\cos(k)/T))^{-1}$  avec  $T=0.1$ . Les pointillés verts représentent un fit numérique réalisé avec une distribution de Boltzmann  $a_1 \exp\{a_2 \cos(k)\}$  où le paramètre  $a_2$  est ici positif. b) La distribution de rapidité à l’instant initial est une distribution oscillante  $(1 - \cos(k))/2$  dont le premier mode de Fourier est différent de zéro. Les pointillés verts sont ici aussi le résultat d’un fit numérique avec une distribution de Boltzmann  $a_1 \exp\{a_2 \cos(k)\}$ , mais le paramètre  $a_2$  est cette fois négatif. c) La distribution de rapidité initiale est là aussi une distribution oscillante  $(1 - \cos(2k))/2$ , mais son premier mode de Fourier est nul.

### 7.3.3 Effet des pertes à $K$ corps

Dans cette section, nous donnons la solution analytique de l'équation d'évolution de la distribution de rapidité pour des pertes à  $K$  corps et pour une distribution initiale plate (indépendante de  $k$ ). De plus, en implémentant la fonctionnelle de pertes à  $K$  corps (7.42), nous montrons que la résolution numérique de l'équation d'évolution de la distribution de rapidité est possible quel que soit  $K$  et peu importe la condition initiale. Nous illustrons cette section en étudiant l'effet des pertes à trois corps sur la distribution de rapidité et la densité de particule en guise d'exemple.

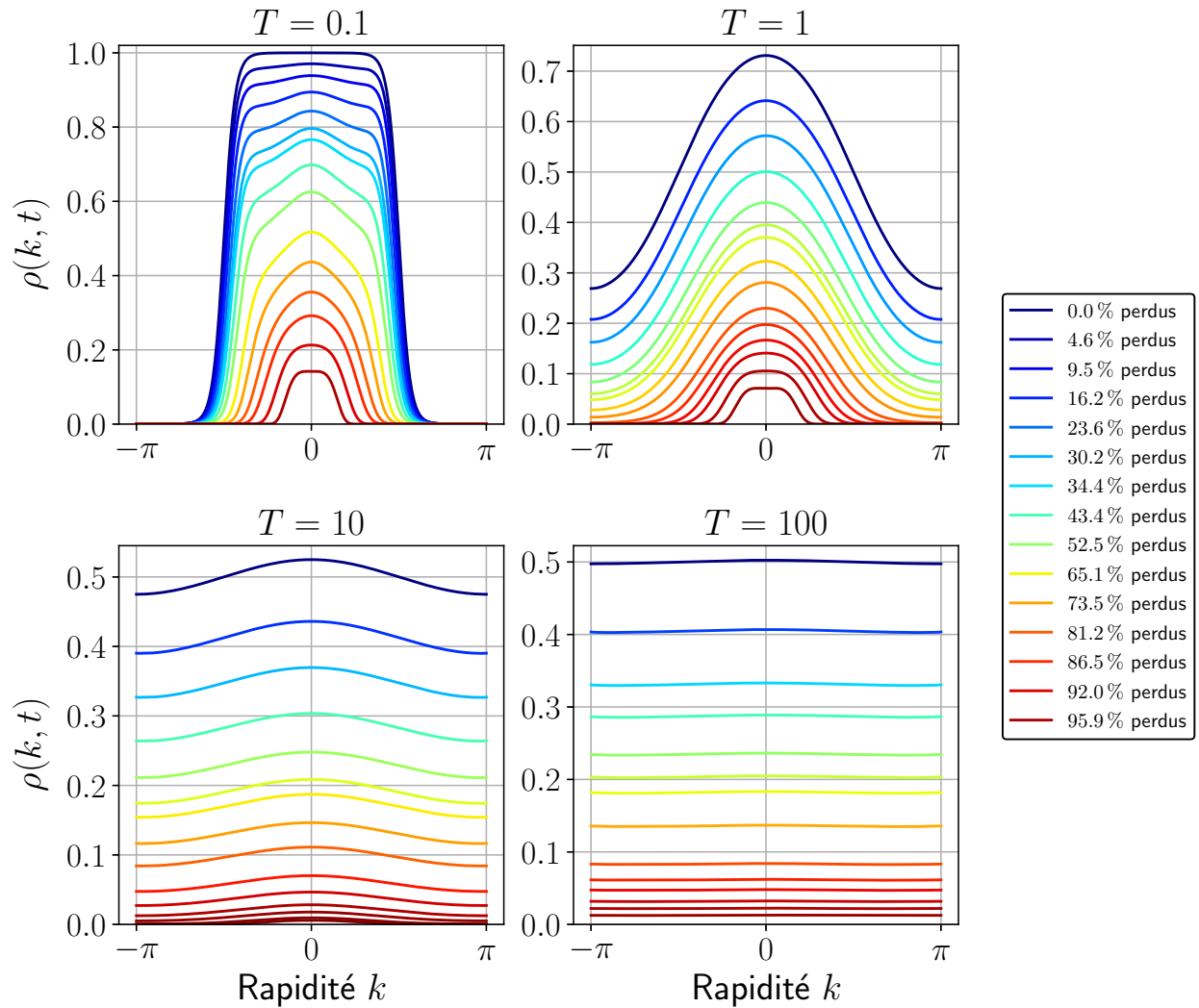


FIGURE 7.7 – Effets des pertes à trois corps sur différentes distributions de rapidité. A l'instant initial les distributions de rapidité sont données par une distribution de Fermi-Dirac  $\rho_0(k) = (1 + \exp\{-\cos(k)/T\})^{-1}$  où  $T$  est la température. Les courbes colorées sont issues de la résolution numérique de l'équation d'évolution de la distribution de rapidité avec la méthode de Runge-Kutta.

Considérons l'équation d'évolution (7.14) pour des pertes à  $K$  corps et prenons comme état initial une distribution de rapidité plate. Cet état initial correspond à un état de température infinie. Avec cette condition initiale, la distribution de rapidité est identique

à la densité moyenne de particule  $\rho(k) = n$ . La fonctionnelle de pertes (7.42), quant à elle, se simplifie grandement. En effet, les  $K$  matrices  $A$  deviennent toutes identiques et diagonales. Leurs déterminants sont égaux à  $n^K$  et cela conduit donc à  $K n^K$ . Les matrices  $B$  et  $C$  possèdent le même déterminant et se compensent pour ne laisser finalement que

$$F_K[\rho](k) = K n^K. \quad (7.63)$$

En remplaçant la fonctionnelle dans (7.14) par son expression ci-dessus, on en déduit la densité moyenne

$$n(t) = \frac{n(0)}{(1 + n^{K-1}(0) K(K-1) \Gamma t)^{1/(K-1)}}, \quad (7.64)$$

qui est celle attendue pour une théorie de champ moyen.

Prenons à présent le cas  $K = 3$ . Nous ne sommes pas en mesure d'écrire la fonctionnelle de perte avec une formule simple comme dans les cas  $K = 1$  et  $K = 2$ . En dehors d'une distribution de rapidité initiale plate, l'équation (7.14) ne peut se résoudre que numériquement pour  $K > 2$ . L'effet des pertes à trois corps sur différentes distributions de rapidités est présenté dans la figure Fig. (7.7). On observe que les distributions de rapidité évoluent vers des distributions en forme de cloche et s'étalent dans l'espace des  $k$  de manière similaire au cas  $K = 2$ .

Le comportement aux temps longs de la densité moyenne de particule est également étudié. Sur la figure Fig. (7.8), nous avons représenté l'allure de la densité de particule pour plusieurs distributions de rapidité. Comme pour le cas  $K = 2$ , nous considérons des distributions de rapidité initiale de la forme  $\rho_0(k) = (1 + \exp(-\cos(k)/T))$  où  $T$  est la température, ainsi que des distributions de la forme  $\rho_0(k) = (1 - \cos(sk))/2$  où  $s$  est entier. On constate que pour une distribution thermique initiale correspondant à un état de température infinie la densité de particule décroît en  $1/\sqrt{t}$  à longs temps. Ceci est attendu d'après la formule (7.64). Pour des températures finies, il semble que la densité de particule coïncide avec la courbe pour  $T \rightarrow \infty$  pour des temps faibles, puis suit une loi de puissance en  $\simeq t^{-0.21}$ , indépendamment de la valeur de  $T$ . On observait déjà un comportement similaire pour le cas  $K = 2$  pour des distributions thermiques et non thermiques.

Contrairement au cas  $K = 2$ , la présence ou l'absence du premier mode de Fourier de la distribution de rapidité initiale ne semble pas jouer un rôle aussi clair pour  $K = 3$ . En effet, dans la figure Fig. (7.8) on voit que le comportement aux temps longs de la densité moyenne de particule, correspondant à des distributions non thermiques dont les premiers modes de Fourier sont nuls (courbes vertes claires et foncées), ne dépend pas du premier mode de Fourier.

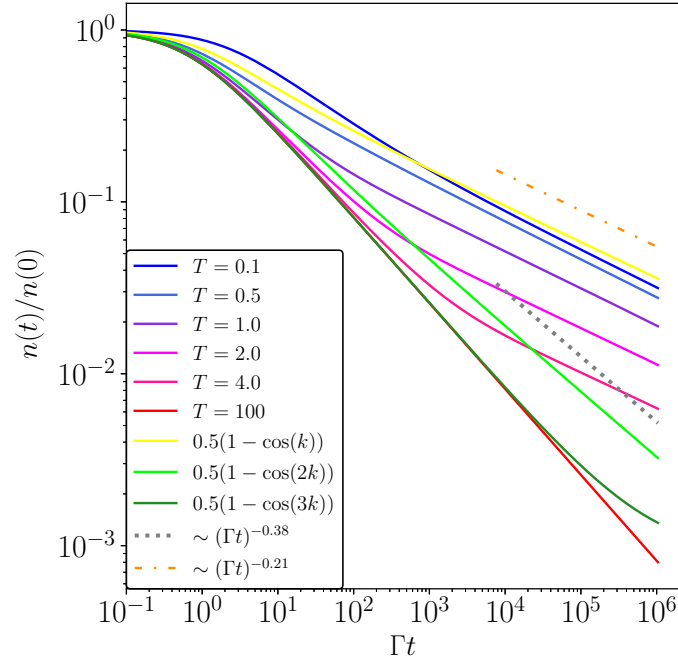


FIGURE 7.8 – Evolution temporelle de la densité moyenne de particules sous l’effet des pertes à trois corps pour différentes distributions de rapidité. Les courbes pleines (de bleu à rouge) représentent le ratio  $n(t)/n(0)$  pour des distributions initiales thermiques tandis que les courbes colorées en jaune, vert clair et verte foncé sont obtenues avec des distributions non thermiques ayant respectivement un premier mode de Fourier non nul (jaune) et pas de premier mode de Fourier (vert). Les pointillés gris représentent le comportement asymptotique de la courbe verte claire et les pointillés oranges indiquent le comportement aux temps longs du ratio  $n(t)/n(0)$  pour des distributions initiales avec un premier mode de Fourier non nul. Le comportement asymptotique de la courbe rouge, correspondant à une distribution initiale plate, est en  $\sim 1/\sqrt{t}$  comme attendu d’après le résultat (7.64).

Pour terminer cette sous-section, nous étudions le comportement aux temps longs de la distribution de rapidité renormalisée par la densité moyenne de particule  $\rho(k, t)/n(t)$ . Nous considérons les mêmes distributions de rapidité initiales que dans la figure Fig. (7.6). Pour les distributions représentées dans les figures Fig. (7.9)-a) et Fig. (7.9)-b), on constate que le rapport  $\rho(k, t)/n(t)$  évolue à temps longs vers une distribution en forme de cloche centrée respectivement en  $k = 0$  pour la figure a) et  $k = \pm\pi$  pour b). Pour la distribution visible en a), on observe l’apparition d’un creux en son centre. En revanche dans la figure Fig. (7.9)-c), la distribution aux temps longs développe deux pics centrés en  $k = \pm\pi/2$ .

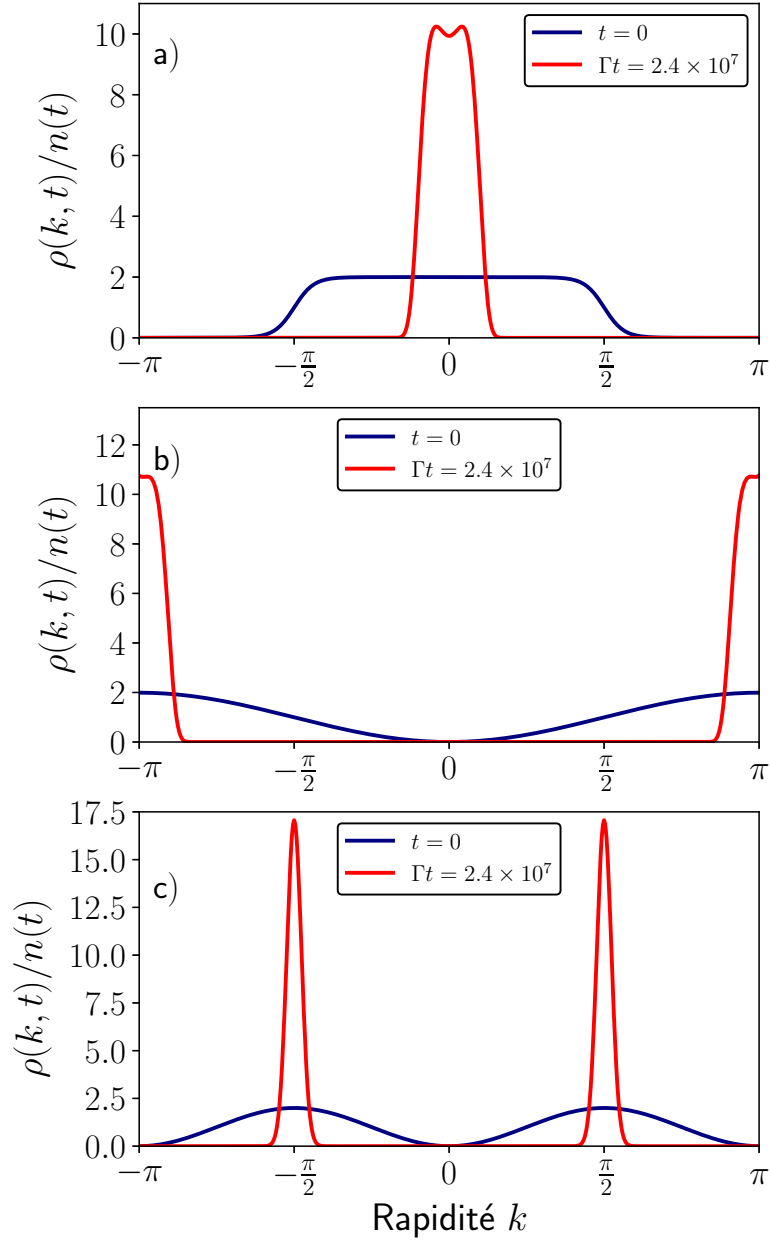


FIGURE 7.9 – Comportement aux temps longs de différentes distributions de rapidité normalisées par la densité correspondante sous l’effet des pertes à trois corps. Les courbes bleues représentent le rapport  $\rho(k, 0)/n(0)$ , soit la distribution de rapidité initiale. Les courbes rouges donnent l’allure de la distribution de rapidité aux temps longs. a) Initialement la distribution de rapidité est donnée par une distribution de Fermi-Dirac  $\rho_0(k) = (1 + \exp(-\cos(k)/T))^{-1}$  avec  $T=0.1$ . b) A l’instant initial la distribution de rapidité est donnée par  $(1 - \cos(k))/2$ , dont le premier mode de Fourier est non nul. c) La distribution de rapidité initiale s’écrit ici comme  $(1 - \cos(2k))/2$  et son premier mode de Fourier est nul.



## 7.4 Dynamique du gaz de fermions inhomogène sous l'effet des pertes

Cette dernière section est dédiée à l'extension du modèle présenté dans les sections précédentes au cas d'un système inhomogène. Afin de se rapprocher des expériences d'atomes froids dans lesquels le potentiel de piégeage brise l'homogénéité du gaz de Tonks-Girardeau, nous ajoutons au modèle de bosons de cœur dur un potentiel harmonique  $V(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2}$ . L'objectif est d'étudier les effets des pertes atomiques sur un système inhomogène. Pour étudier la dynamique du gaz de bosons en présence du potentiel de piégeage, nous nous plaçons à une échelle mésoscopique et divisons notre système en cellules fluides repérées par leurs positions  $x$ . Ces cellules fluides contiennent un nombre de bosons suffisamment grand pour que l'état du fluide au sein de chaque cellule puisse être décrit par une distribution de rapidité  $f(x, k)$ . La portion de fluide contenue dans chaque cellule peut être considérée comme un système homogène.

L'équation d'évolution de la distribution de rapidité  $f(x, k)$  est similaire à celle de la fonction de Wigner (5.8) écrite dans le chapitre 5

$$\partial_t f(x, k) + \sin(k) \partial_x f(x, k) - \omega^2 x \partial_k f(x, k) = -\Gamma F[f](x, k), \quad (7.65)$$

où la fonctionnelle  $F[f](x, k)$  est une généralisation de la fonctionnelle de pertes établie précédemment pour la distribution de rapidité dépendante de la position et n'agit que sur les rapidités  $k$ .

Dans la sous-section suivante, nous utilisons la méthode des caractéristiques pour résoudre l'équation (7.65) numériquement. Cette méthode permet de trouver les familles de courbes le long desquelles l'équation aux dérivées partielles se réduit à une équation différentielle. En effet, en écrivant la dérivée totale de  $f(x, k)$

$$\frac{df(x, k)}{dt} = \partial_t f(x, k) + \frac{dx}{dt} \partial_x f(x, k) + \frac{dk}{dt} \partial_k f(x, k), \quad (7.66)$$

on peut, par identification avec l'équation (7.65), obtenir les familles de courbes définies par les deux équations différentielles couplées suivantes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin(k) \\ \frac{dk}{dt} = -\omega^2 x. \end{cases} \quad (7.67)$$

Le long des trajectoires définies par le système d'équations différentielles ci-dessus, l'équation (7.65) est équivalente à

$$\frac{df(x, k)}{dt} = -\Gamma F[f](x, k). \quad (7.68)$$

Cette méthode présente l'avantage de causer moins de diffusion numérique que la méthode des différences finies et permet d'obtenir des résultats satisfaisants en quelques jours.

### 7.4.1 Simulation de la dynamique dans l'espace des phases

Pour résoudre numériquement l'équation (7.65), nous discrétisons notre espace des phases au moyen d'une grille régulière. A l'instant initial, on associe à chaque noeud de la grille une valeur de la distribution de rapidité thermique suivante

$$f_0(x, k) = \frac{1}{1 + \exp\left(\left(-\cos(k) + \frac{\omega^2 x^2}{2} - \mu\right)/T\right)}, \quad (7.69)$$

avec  $\mu$  le potentiel chimique. Maintenant vient la partie la plus importante. Nous décomposons la dynamique de  $f(x, k)$  en deux étapes. La première étape consiste à faire évoluer la distribution de rapidité sans le membre de droite de (7.65) pendant un temps  $\Delta t$

$$f'_{t+\Delta t}(x, k) = f_t(x_c(t + \Delta t), k_c(t + \Delta t)). \quad (7.70)$$

La quantité  $f'_{t+\Delta t}(x, k)$  est un intermédiaire de calcul correspondant à la distribution de rapidité s'étant déplacée dans l'espace des phases pendant un instant  $\Delta t$  et s'obtient en utilisant la méthode des caractéristiques. A l'instant initial, on associe à chaque noeud  $(x, k)$  de la grille une valeur de  $f(x, k)$  conformément à la relation (7.69), puis nous déplaçons chacun de ces points selon les trajectoires établies en (7.67) pendant un temps  $\Delta t$ , conduisant à  $(x_c(t + \Delta t), k_c(t + \Delta t))$ . Notons que la valeur de la distribution associée à chaque point reste inchangée le long de la trajectoire. Après avoir déplacé chacun des noeuds de la grille, on utilise une interpolation linéaire pour reconstruire  $f'_{t+\Delta t}(x, k)$  sur les points de la grille.

La deuxième étape permet de résoudre la dynamique de la distribution  $f'_{t+\Delta t}(x, k)$  sous l'effet des pertes atomiques durant un temps  $\Delta t$ . La fonctionnelle de pertes ne s'applique à la distribution de rapidité que pour un  $x$  donné, cela revient à faire agir la fonctionnelle sur les colonnes de notre grille. Ainsi, nous introduisons un autre intermédiaire de calcul  $y(\Delta t, k)$  qui est solution de l'équation différentielle

$$\partial_\tau y(\tau, k) = -\Gamma F[y(\tau, \cdot)](k), \quad y(0, k) = f'_{t+\Delta t, x}, \quad (7.71)$$

que nous devons résoudre pour chaque colonne de la grille. Nous résolvons cette équation en utilisant la méthode de Runge-Kutta et nous construisons ainsi la distribution de rapidité  $f_{t+\Delta t}(x, k)$  selon la relation

$$f_{t+\Delta t}(x, k) = y(\Delta t, k), \quad (7.72)$$

où ici  $f_{t+\Delta t}(x, k)$  est la distribution de rapidité solution de l'équation (7.65) à l'instant  $t + \Delta t$ . Ces deux étapes permettent in fine de résoudre la dynamique de la distribution de rapidité dépendante de la position sous l'effet des pertes à  $K$ -corps.

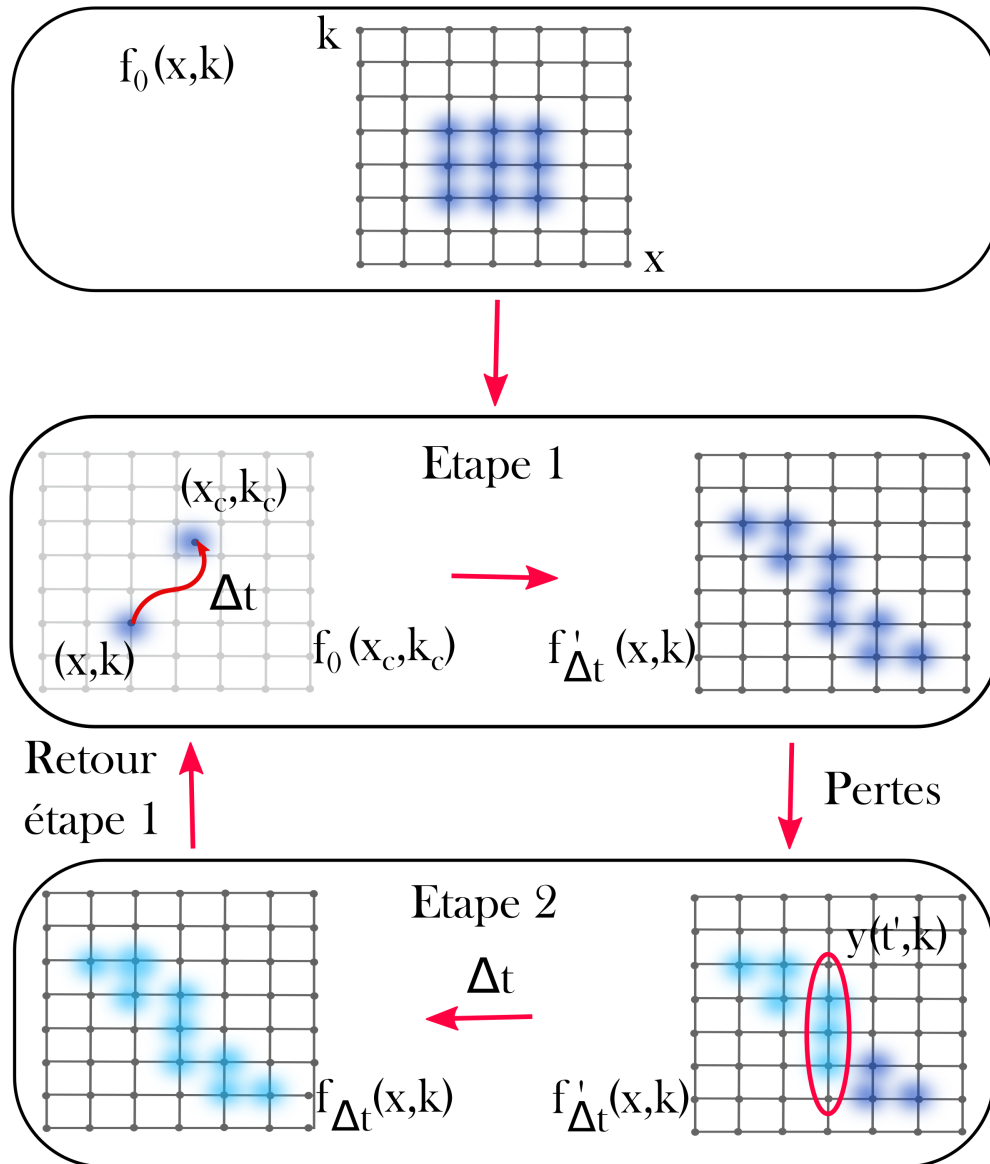


FIGURE 7.10 – Schéma récapitulant la procédure numérique pour construire la distribution de rapidité dépendante du temps sous l'effet des pertes atomiques.

### 7.4.2 Résultats

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus en utilisant la méthode numérique expliquée dans la section précédente. Notre objectif est de mettre en évidence les effets du potentiel de confinement sur la dynamique du système se vidant lentement de ses particules. De manière générale, la dynamique est étudiée dans deux régimes déter-

minés par la valeur du rapport  $\omega/\Gamma$ . Dans la limite  $\omega \ll \Gamma$ , on s'attend à retrouver les résultats du système homogène puisque la dynamique est dominée par les processus de pertes. Dans le régime de fort confinement  $\omega \gg \Gamma$ , le système a le temps de relaxer vers un état stationnaire entre deux processus de pertes. La distribution initiale (7.69) devrait donc conserver son invariance par rotation tout au long de la dynamique.

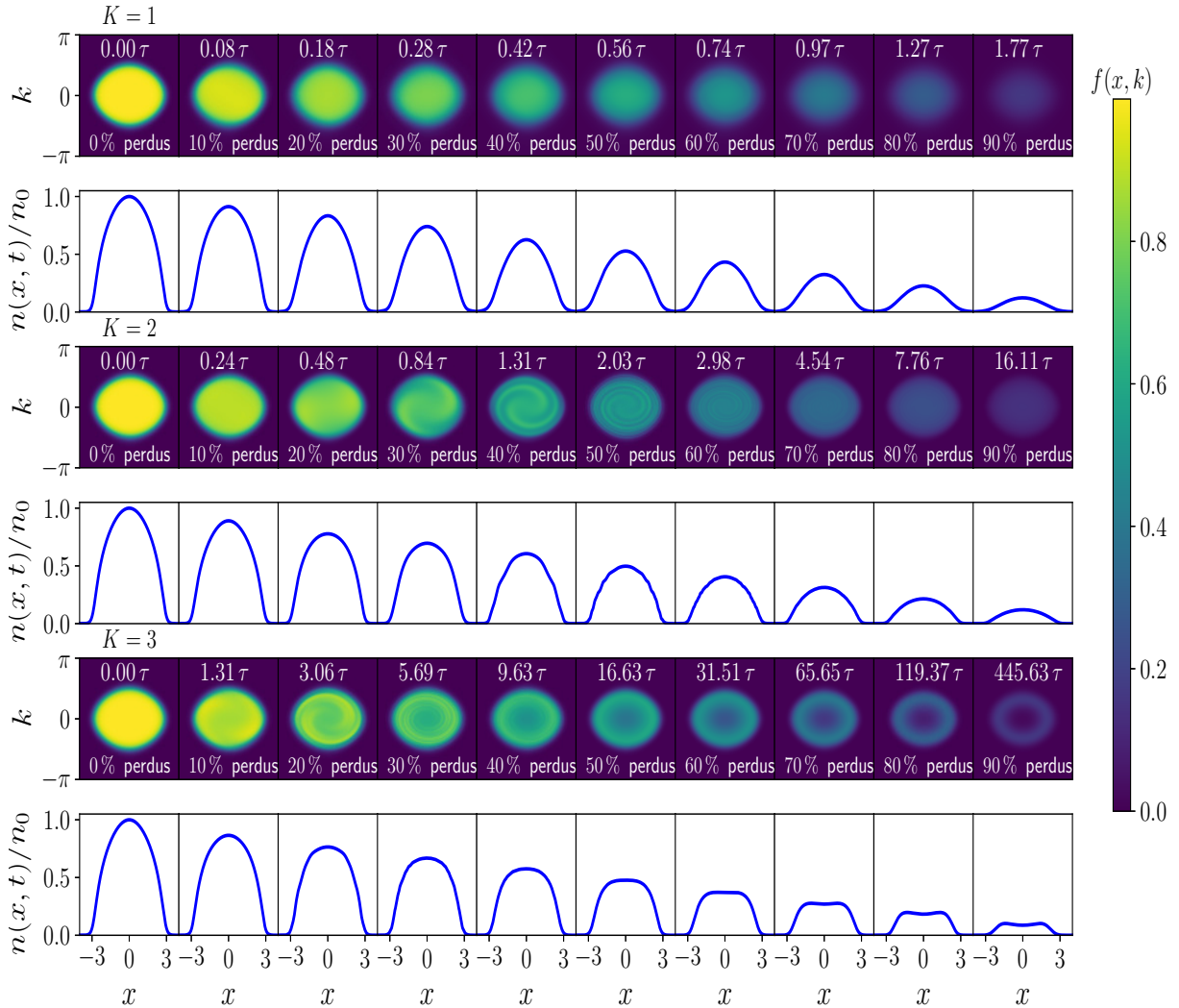


FIGURE 7.11 – Evolution temporelle de la distribution de rapidité dépendante du temps sous l'effet des pertes à un corps ( $K=1$ ), deux corps ( $K=2$ ) et trois corps ( $K=3$ ). La distribution initiale est donnée par (7.69) avec  $\omega = 5\Gamma$ ,  $\mu=0$  et  $T=0.1$ . Le taux de pertes est  $\Gamma=0.1$  et la période de révolution dans le puits de potentiel  $\tau = 2\pi/\omega$ . L'espace des phases est discrétisé avec une grille régulière de 300 points par 300 points et le pas de temps est  $\Delta t = 0.25$ . Les profils de densité  $n(x, t)$  sont obtenus en intégrant sur  $k$  la distribution de rapidité dépendante de la position. Chaque profil de densité est normalisé par la densité initiale au centre du piège  $n(0, 0) = n_0 = 1/2$ .

Nous réalisons dans un premier temps une simulation numérique avec  $\omega = 5\Gamma$  pour les pertes à un corps, deux corps et trois corps. Les résultats de cette simulation sont présentés dans la figure Fig. (7.11). La dynamique dans l'espace des phases est représentée par les différents portraits de phase montrant l'impact des pertes sur la distribution initiale. En dessous de chaque portrait de phase, nous avons affiché le profil de densité

correspondant que nous définissons comme  $n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk f(x, k)$ .

Sur cette figure, on constate que la dynamique du système sous l'effet des pertes à un corps n'est pas très différente de celle induite par les pertes à deux corps. Que ce soit pour  $K = 1$  ou  $K = 2$ , la forme générale de la distribution initiale est conservée lors de la simulation. Cependant, il convient de noter quelques effets spécifiques aux pertes à un corps et deux corps. Pour  $K = 1$ , on observe que le centre de la distribution n'est pas dépeuplé aussi rapidement que les bords. En effet, on voit sur les dernières images que le centre de la distribution possède le temps de vie le plus long tandis qu'il ne reste des bords qu'un halo s'atténuant progressivement. De plus, on voit que la distribution s'étale lentement dans l'espace des phases, ce qui se voit également sur le profil de densité correspondant. Cet étalement était déjà présent dans le cas du gaz de bosons homogène et constitue donc un effet général des pertes à un corps.

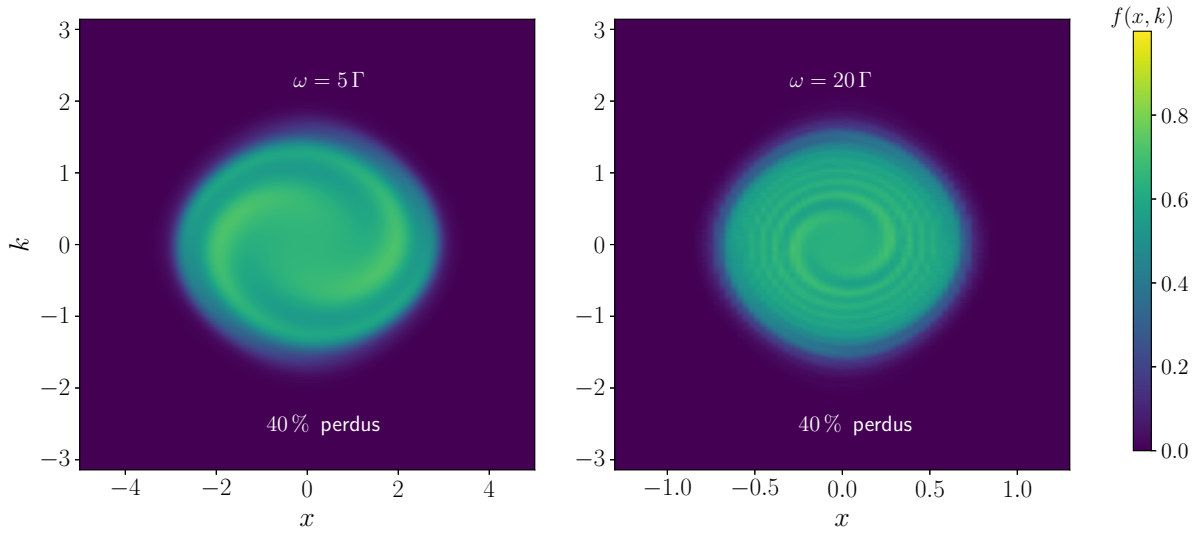


FIGURE 7.12 – Comparatif de la structure en spirale apparaissant dans la distribution  $f(x, k)$  sous l'effet des pertes à deux corps. À gauche nous considérons la distribution dans l'espace des phases avec  $\omega = 5\Gamma$  et à droite avec  $\omega = 20\Gamma$ . La comparaison est effectuée avec des distributions ayant perdu 40% d'atomes.

Dans le cas  $K = 2$ , nous n'observons pas d'étalement, mais nous notons la présence d'une structure en spirale se formant au centre de la distribution pour environ 30-40% de pertes. On suppose que la présence de cette spirale dépend de la compétition entre la vitesse  $\Gamma$  à laquelle le système perd des particules et la fréquence du piège  $\omega$ . Pour une dynamique dominée par le potentiel de confinement, l'état initial serait quasi stationnaire et alors la spirale devrait être atténuée. C'est en effet ce que l'on voit dans la figure Fig. (7.12), qui montre la distribution dans l'espace des phases pour  $\omega = 5\Gamma$  et  $\omega = 20\Gamma$  après que 40% des atomes aient été perdus. Alors que pour  $\omega = 5\Gamma$  la spirale couvre l'entièreté de la distribution, elle n'est localisée qu'au centre de la distribution pour  $\omega = 20\Gamma$ . Pour terminer l'analyse du cas  $K = 2$ , notons qu'au delà de 70% d'atomes perdus, la distribution s'estompe uniformément au cours du temps (voir Fig. (7.11)).

Enfin, pour  $K = 3$  on remarque que, contrairement à  $K = 1$  et  $K = 2$ , le centre de la distribution se vide plus rapidement que les bords. En effet, il se forme progressivement à

partir de 30% d'atomes perdus un trou au cœur de la distribution, qui s'élargit au fur et à mesure de la dynamique. Physiquement, cet effet peut se comprendre comme une inversion de population. Les orbitales à une particule correspondant aux hautes énergies sont plus peuplées que celles correspondant aux basses énergies. A partir de 80% d'atomes perdus, la distribution de rapidité dépendante de la position devient un anneau disparaissant peu à peu. Cet effet est aussi visible sur les profils de densité. Partant d'un profil en forme de cloche, on constate que son sommet est progressivement aplati. Lorsque la quantité d'atomes dans le système est faible, le profil de densité développe une structure en double pic, qui est identique à ce que l'on pouvait observer dans le cas d'un système homogène soumis aux pertes à trois corps. L'émergence de cette structure en double pic est donc préservée dans le cas inhomogène. Notons qu'il se forme aussi une spirale au centre de la distribution vers 30% de pertes, mais cette dernière est moins visible que celle du cas  $K = 2$ .

A partir de la distribution  $f(x, k)$ , on peut en déduire l'allure du nombre de particule  $N(t)$  par intégration sur  $k$  et  $x$ . Dans le cas des pertes à un corps, on peut montrer que le nombre de particule  $N(t)$  décroît de manière exponentielle  $N(t) = N(0) \exp\{-\Gamma t\}$ , exactement comme dans le cas homogène. Les cas  $K = 2$  et  $K = 3$  sont plus intéressants. Afin de mettre en évidence les effets du potentiel de confinement sur le nombre de particule, nous calculons  $N(t)$  pour trois fréquences de piégeage différentes :  $\omega = 20\Gamma$ ,  $\omega = 10\Gamma$  et  $\omega = 5\Gamma$ . Pour chacune de ces fréquences, nous adaptons le potentiel chimique  $\mu$  de manière à fixer la densité de particule initiale à  $1/2$ . Pour le cas des pertes à deux corps, on observe que le système perd des atomes d'autant plus rapidement que la fréquence du piège est élevée. Cela signifie qu'un fort confinement accélère la dépopulation du système. Cet effet a également été mis en évidence dans les références pour des modèles différents, ce qui conforte nos résultats. De plus, nous nous sommes intéressés aux comportements aux temps longs du nombre de particule. Sur la figure Fig. (7.13)-a) on constate que le nombre de particule décroît comme  $\sim 1/t$  pour des temps longs, quelque soit la fréquence  $\omega$  considérée. Cette décroissance en  $1/t$  est celle prédite par la théorie de champ moyen (7.56) appliquée au système homogène.

Pour les pertes à trois corps, nous pouvons réaliser la même étude que pour  $K = 2$ . Nous fixons la densité de particule initiale à  $1/2$  par l'intermédiaire des potentiels chimiques  $\mu$  et considérons les mêmes fréquences de piégeage. Comme on peut le voir sur la figure Fig. (7.13)-b), plus la fréquence du potentiel de confinement est grande, plus les pertes sont accélérées, de manière similaire à ce nous avons constaté pour  $K = 2$ . En ce qui concerne le comportement à long temps du nombre de particule  $N(t)$ , nous n'observons pas l'exposant  $1/2$  prédit par la théorie de champ de moyen (7.64). A la place, le nombre de particule décroît selon  $\sim 1/t^{0.6}$ , ce qui est proche de l'exposant attendu, mais différent. Cet écart entre la valeur prédite et celle observée pourrait possiblement se réduire en effectuant des simulations numériques dépassant les 90% de pertes. Toutefois, ce genre de simulations demande plusieurs semaines de calculs, car plus le système est vidé de ses particules plus la probabilité de perdre trois atomes à la fois est faible. De ce fait, nous ne pouvons pas réellement conclure que, sous l'effet des pertes à trois corps, le nombre de particule diminue selon la loi de puissance  $\sim 1/\sqrt{t}$ .

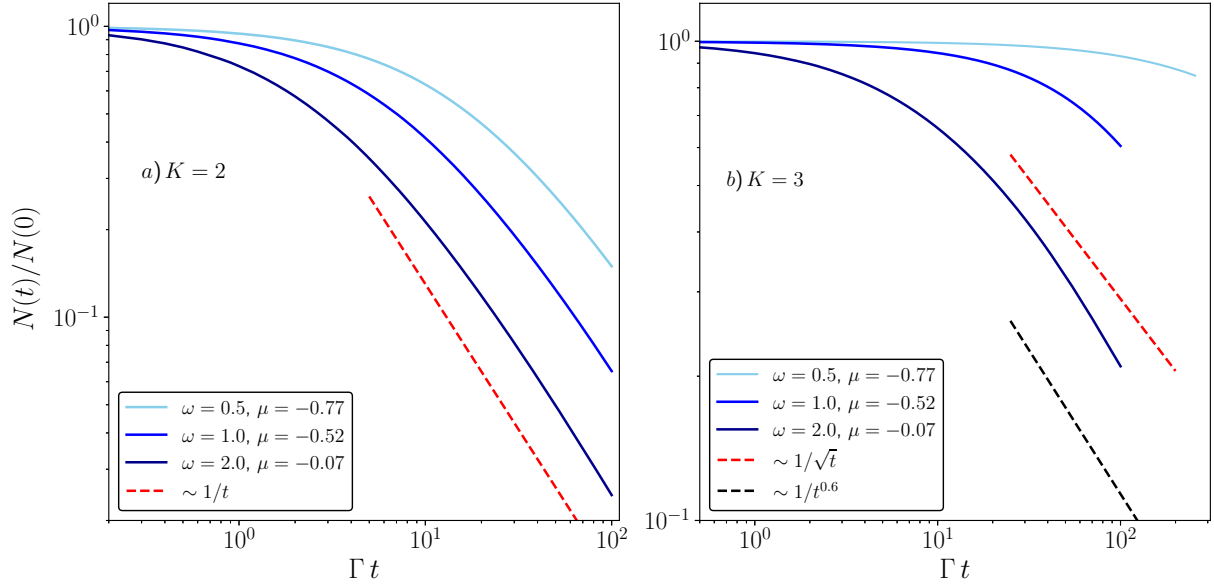


FIGURE 7.13 – a) Évolution du nombre de particule  $N(t)$  sous l’effet des pertes à deux corps. Les courbes pleines représentent l’allure du nombre de particule  $N(t)$  normalisé par le nombre de particule à l’instant initial  $N(0)$  pour trois fréquences de piégeage :  $\omega = 5\Gamma$  (bleu clair),  $\omega = 10\Gamma$  (bleu) et  $\omega = 20\Gamma$  (bleu foncé). La droite en pointillés rouges est le comportement aux temps longs du rapport  $N(t)/N(0)$ . b) Évolution du nombre de particule  $N(t)$  sous l’effet des pertes à trois corps. Les courbes pleines représentent l’allure du nombre de particule  $N(t)$  normalisé par le nombre de particule à l’instant initial  $N(0)$  pour trois fréquences de piégeage :  $\omega = 5\Gamma$  (bleu clair),  $\omega = 10\Gamma$  (bleu) et  $\omega = 20\Gamma$  (bleu foncé). La droite en pointillés rouges est la loi de puissance attendue pour une théorie de champ moyen dans le cas homogène. Les pointillés noirs montrent le comportement observé du rapport  $N(t)/N(0)$ .

Pour a) et b) les potentiels chimiques  $\mu$  sont choisis de telle manière à fixer la densité de particule initiale à  $1/2$ .

## 7.5 Conclusion du chapitre

Afin de conclure ce chapitre, il convient de revenir sur les méthodes et résultats obtenus. Le but de ce chapitre était d’étudier les effets des pertes à  $K$  corps sur un gaz de bosons de cœur dur sur réseau et montrer la présence ou l’absence d’une thermalisation induite par les pertes. Pour ce faire, nous avons repris l’hypothèse de pertes adiabatiques déjà utilisée dans les références [34, 37, 104, 105, 106]. Nous avons introduit la fonctionnelle de pertes, qui contient l’information sur le processus de perte à  $K$  corps et nous avons explicitement calculé cette fonctionnelle dans les cas  $K = 1$  et  $K = 2$ . De plus, nous avons montré qu’il était possible de l’écrire sous la forme de déterminants de matrices de taille finie dans le cas général des pertes à  $K$  corps. Connaissant l’expression de la fonctionnelle de pertes, nous avons résolu analytiquement la dynamique de la distribution de rapidité pour  $K = 1$  et  $K = 2$ , donnant ainsi une expression exacte pour la distribution de rapidité au temps  $t$ . Pour les pertes à un corps, la fonctionnelle de pertes (7.25) ainsi que la distribution de rapidité (7.48) présentent des similarités avec celles obtenues pour le gaz de Tonks-Girardeau dans la référence [34]. L’étude du comportement à long temps de la distribution de rapidité a montré qu’il dépendait de la distribution de rapidité initiale.

En effet pour une distribution initialement thermique, cette dernière évolue vers une distribution très bien décrite par une distribution de Boltzmann, mais pour une distribution initiale oscillante, la distribution de rapidité conserve ces oscillations aux temps longs. Ces observations étant confirmées par le numérique, nous concluons que les pertes à un corps n'induisent pas de thermalisation.

Pour les pertes à deux corps, nous avons trouvé une solution formelle à l'équation d'évolution de la distribution de rapidité (7.55) et nous avons étudié le comportement aux temps longs de la distribution de rapidité et de la densité moyenne de particule. Ainsi, nous avons montré analytiquement et numériquement que la distribution de rapidité évoluait vers une distribution de Boltzmann, soit vers un état d'équilibre thermique, ce qui nous a permis de conclure les pertes à deux corps induisent bien la thermalisation du système. Cette conclusion n'est toutefois valable que pour des distributions initiales ayant un premier mode de Fourier non nul. Si initialement la distribution de rapidité possède un premier mode de Fourier égal à zéro, alors la distribution de rapidité est indépendante du temps et est simplement renormalisée par la densité correspondante. La présence du premier mode de Fourier a également son importance dans le comportement aux temps longs de la densité moyenne de particule. Cette dernière décroît en  $\sim 1/\sqrt{t}$  pour des distributions de rapidité initiales avec un premier mode de Fourier différent de zéro, alors qu'elle décroît en  $\sim 1/t$  si le premier mode de Fourier est nul. Ces lois de puissance ont également été mises en évidence pour des modèles différents [37, 38]. Pour les pertes à trois corps, nous avons également observé que la densité moyenne de particule décroissait suivant la loi de puissance  $\sim 1/\sqrt{t}$  pour une distribution de rapidité initiale correspondant à un état de température infinie (distribution plate). Pour n'importe quelle autre distribution, la loi de puissance semble être donnée par  $\sim 1/t^{0.21}$ . De manière générale pour des distributions initialement plates nous avons montré (7.64) que la loi de puissance était donnée par  $\sim 1/t^{1/(K-1)}$ . Ces résultats sont similaires à ceux présentés dans un preprint récent [107], dans lequel les auteurs étudient les effets des pertes à  $K = 2, 3, 4$  corps sur la densité de particule. Le fait que notre modèle englobe en grande partie leurs résultats pour  $K$  pair, conforte notre analyse.

Enfin, nous avons étendu notre modèle à un système de bosons de cœur dur sur réseau plongé dans un potentiel harmonique. La méthode numérique que nous avons développée, permet de résoudre la dynamique du système inhomogène soumis aux pertes à  $K$  corps. En règle générale, le potentiel de piégeage semble accélérer les pertes atomiques pour  $K \geq 2$ . De plus, nous avons constaté que le gaz évoluait vers un état non thermique. En effet, dans l'espace des phases, la distribution développe des structures en spirale et en particulier pour  $K = 3$ , nous avons observé l'apparition d'un trou au centre de la distribution. L'évolution du nombre de particule semble également suivre la loi de puissance en  $\sim 1/t^{1/(K-1)}$ , ce qui est le comportement attendu pour le système homogène avec un traitement de champ moyen. Cette dernière assertion a néanmoins besoin d'être confirmée pour le cas des pertes à trois corps.



# Conclusion générale

Depuis maintenant une trentaine d'années, les expériences d'atomes froids se sont révélées être d'incroyables outils pour explorer les propriétés physiques des gaz quantiques. Leur plus célèbre fait d'arme étant l'observation d'un condensat de Bose-Einstein en 1995 [18, 19], plus de 70 ans après sa prédiction théorique. De nos jours, les expériences d'atomes froids sont utilisées pour étudier la dynamique hors équilibre des systèmes à une dimension et ont mis en évidence des propriétés physiques propres aux systèmes de basse dimension. Dans la communauté des atomes froids, c'est la fameuse expérience du pendule de Newton quantique [28], dont les résultats ont été expliqués par la théorie de l'hydrodynamique généralisée [30, 29], qui met en lumière les conséquences de l'intégrabilité sur la dynamique des gaz quantiques à une dimension. Malgré le succès de ces expériences, la description théorique d'une expérience typique d'atomes froids reste encore imparfaite. Généralement, pour rendre compte des observations expérimentales, on utilise le modèle de Lieb-Liniger [1, 33] et l'approximation de densité locale [57], puisqu'il n'existe pas de théorie décrivant les systèmes inhomogènes. Ainsi on peut, par exemple, reproduire les profils de densité expérimentaux, mais l'accord entre la théorie et l'expérience est loin d'être parfait. Aussi, lors de chaque expérience on constate la présence de pertes atomiques dont les causes sont diverses. En dépit du potentiel de confinement dans lequel est plongé le gaz, un ou plusieurs atomes peuvent s'échapper du piège. Ce phénomène étant inévitable, il est capital de comprendre ses effets sur la dynamique du système.

Le travail réalisé lors de cette thèse consistait d'une part, à élaborer une théorie permettant d'améliorer la précision de l'approximation de densité locale et d'autre part, à décrire le phénomène de pertes atomiques dans le cas d'un système homogène, puis inhomogène. Dans le chapitre 6 de ce manuscrit nous proposons d'écrire la densité locale du gaz confiné comme une fonctionnelle du potentiel de piégeage et nous supposons que cette fonctionnelle peut être développée en gradient du potentiel. L'ordre zéro de l'expansion est la densité prédite par la LDA tandis que les termes d'ordre supérieur sont assimilés à des corrections à la LDA standard. L'un des résultats de notre étude est que le terme d'ordre un est identiquement nul pour des raisons de symétrie. Les termes d'ordre deux sont respectivement proportionnels à la courbure et au carré de la pente du potentiel de piégeage. Nous montrons que les termes correctifs d'ordre deux peuvent être calculés en utilisant la théorie de la réponse linéaire et non linéaire. Plus précisément, l'idée est de traiter le potentiel de confinement comme une petite perturbation sur l'état fondamental du modèle de Lieb-Liniger. Pour les régimes de Tonks-Girardeau et de Gross-Pitaevskii, nous sommes en mesure de déterminer explicitement les termes correctifs. Pour un régime d'interaction intermédiaire, nous calculons numériquement la correction proportionnelle à la courbure du potentiel en sommant les facteurs de formes couplant l'état fondamental avec un état excité du modèle de LL. Motivé par le fait que seuls les états excités à une paire particule/trou sont importants dans les régimes de forte et faible interaction, nous ne prenons en compte que les états à une paire particule/trou pour des interactions in-

termédiaires. Notre étude numérique des facteurs de formes confirme que les excitations à une paire particule/trou fournissent une contribution mille à cent mille fois plus importante que les excitations à deux paires particule/trou. La méthode numérique utilisée permet alors de construire le premier terme correctif comme une fonction continue du paramètre de Lieb en parfait accord avec les valeurs attendues dans la limite de forte et faible interaction. Cependant, pour la seconde correction, celle proportionnelle au carré de la pente du potentiel, notre méthode numérique ne nous permet de reproduire que le résultat analytique trouvé dans le régime de Tonks-Girardeau. En dehors des fortes interactions, la sommation des facteurs de formes est en échec. Toutefois, en ne gardant que le premier terme correctif, nous pouvons grandement améliorer la précision de la LDA standard autour des extrema locaux du potentiel de confinement. Un comparatif entre des profils de densité issus de simulations DMRG, la LDA et notre LDA corrigée valide la dernière assertion. Il convient d'insister sur le fait que les corrections calculées dans notre théorie sont sous-dominantes par rapport à la LDA standard et que, de ce fait, on ne s'attend pas à ce qu'elles soient pertinentes lorsque la LDA est en échec total.

Le chapitre 7 est dédié au phénomène de pertes atomiques. Le modèle étudié ici consiste en un gaz de bosons de cœur dur vivant sur un réseau unidimensionnel. Nous modélisons les pertes atomiques à l'aide de l'équation de Lindblad et nous adoptons l'hypothèse de pertes adiabatiques [36, 34, 105, 106] pour simplifier la résolution du modèle. Selon cette hypothèse, le gaz a le temps de relaxer vers un état d'équilibre local entre deux événements de pertes. Les valeurs moyennes de chaque charge locale sont alors prises dans un GGE et leur dynamique est gouvernée par la partie dissipative de l'équation de Lindblad. En exprimant les charges locales en terme de la distribution de rapidité (nombre d'occupation), on peut déduire la lente évolution de toutes les charges locales à partir de la distribution de rapidité. Or, nous montrons que l'évolution temporelle de la distribution de rapidité dépend de la fonctionnelle de pertes, qui contient l'information sur le processus de pertes considéré. Cette fonctionnelle peut être explicitement déterminée pour les cas  $K = 1$  et  $K = 2$  et écrite sous une forme simple. Dans le cas général des pertes à  $K$  corps, nous montrons qu'elle prend la forme d'une somme de déterminants de matrices de taille finie. Nous pouvons donc en déduire les effets des pertes sur la distribution de rapidité. En particulier, pour les cas  $K = 1$  et  $K = 2$  nous pouvons résoudre analytiquement l'équation d'évolution de la distribution de rapidité. Les résultats obtenus sont similaires (mais différents) à ceux présentés dans la référence [34] pour les pertes à un corps et dans la référence [75] pour les pertes à deux corps. Nous étudions également le comportement aux temps longs de la distribution de rapidité et de la densité moyenne de particule. Pour  $K = 1$ , la densité moyenne de particule décroît de manière exponentielle au cours du temps et la distribution de rapidité conserve la structure de la distribution initiale. Nous concluons que, en général, la distribution de rapidité n'évolue pas vers un état thermique sous l'effet des pertes à un corps. Pour  $K = 2$ , la densité moyenne de particule suit une loi de puissance en  $\sim 1/\sqrt{t}$  aux temps longs, sauf dans le cas d'une distribution de rapidité avec un premier mode de Fourier égal à zéro, où la loi de puissance est alors  $\sim 1/t$ . En général, la distribution de rapidité évolue bien vers un état thermique sous l'effet des pertes à deux corps, excepté pour une distribution initiale sans premier mode de Fourier. Dans ce cas, elle est constante dans le temps. Le cas des pertes à trois corps est similaire au cas  $K = 2$  et nous observons numériquement deux lois de puissance distinctes :  $\sim 1/\sqrt{t}$  pour une distribution de rapidité correspondant à un état de température infinie et  $\sim 1/t^{0.25}$  dans le cas général. Pour aller plus loin que le système homogène, nous ajoutons un potentiel harmonique au gaz de bosons de cœur

---

dur. En adoptant une approche hydrodynamique, nous développons un code numérique basé sur la méthode des caractéristiques permettant de résoudre la dynamique du système inhomogène soumis aux pertes atomiques. Pour les pertes à deux corps nous mettons en évidence l'apparition d'une structure en spirale au centre de la distribution dans l'espace des phases. Cette spirale tend à disparaître lorsque la fréquence du potentiel harmonique domine largement la taux de perte. L'évolution temporelle du nombre de particule suit également une loi de puissance en  $\sim 1/t$  indépendamment de la fréquence du potentiel de piégeage. Des investigations plus approfondies sont néanmoins nécessaires pour le cas  $K = 3$ , mais il semble que le nombre de particule décroît en suivant la loi de puissance  $\sim 1/\sqrt{t}$ , ce qui est très proche de l'exposant attendu dans le gaz homogène traité avec une théorie de champ moyen.

Les perspectives offertes par la méthode numérique développée dans ce manuscrit sont multiples. Elle peut être utilisée pour simuler les effets des pertes atomiques sur un gaz de bosons de cœur dur que ce soit sur réseau ou dans le continuum. En fait, seule la fonctionnelle de pertes a besoin d'être modifiée en fonction du modèle étudié, on pourrait par exemple utiliser celle de la référence [37]. Pour le gaz de Tonks-Girardeau continu dans un piège harmonique à température nulle, une idée intéressante pourrait être de choisir la distribution initiale comme étant la distribution de Wigner, qui dans ce cas se calcule exactement. Les pertes atomiques (à un corps) seraient alors appliquées en utilisant la fonctionnelle de pertes définie dans la référence [34].

En principe, notre méthode s'applique au cas d'un gaz de bosons loin du régime de Tonks-Girardeau, mais le calcul numérique de la fonctionnelle de pertes dans ce cas n'est pas une chose triviale. Si toutefois des progrès étaient réalisés dans le calcul de la fonctionnelle, cette dernière pourrait être implémentée dans le code IFluid [86].

Enfin et de manière plus générale, notre schéma numérique est parfaitement adapté à la résolution de la partie classique de la dynamique de la fonction de Wigner. Un projet s'inscrivant donc dans la continuité de celui-ci, serait d'incorporer les corrections quantiques à la dynamique de la fonction de Wigner et d'ainsi étudier les conséquences de termes dispersifs lors de procédure de quench.

# Annexe A

## Relation entre le modèle de Lieb-Liniger et la chaîne XXZ

Le but de cette annexe est de montrer l'équivalence [94, 95, 93] entre les états propres et valeurs propres de la chaîne XXZ et ceux du modèle de Lieb-Liniger. En utilisant cette correspondance, il est possible de réaliser des simulations DMRG pour modéliser des systèmes continus. Dans la référence [58], on utilise également la correspondance entre le modèle de Bose-Hubbard et le modèle de Lieb-Liniger.

Dans ce développement, nous reprenons les notations et la procédure générale de la référence [95], que nous recommandons aux lecteurs pour plus de détails. Considérons la chaîne de spins antiferromagnétique

$$H_{AF} = \frac{J}{4} \sum_{j=1}^M (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \Delta (\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - 1)) + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^M \sigma_j^z, \quad (\text{A.1})$$

avec  $J$  la constante d'échange,  $h$  le champ magnétique externe et  $\Delta$  la constante d'anisotropie. On choisit de paramétrer la constante d'anisotropie comme suit,  $\Delta = \cosh(\eta)$  for  $\eta \rightarrow i\pi + i\epsilon$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ .

L'ansatz de Bethe permet d'écrire un état propre de cet hamiltonien de la manière suivante

$$|\phi_N^{AF}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{1 \leq \{y\} \leq M} \sum_{\{\Lambda\}}^{C_M^N} \phi_N(\{\Lambda\}|\{y\}) \sigma_{y_1}^- \dots \sigma_{y_N}^- |0\rangle. \quad (\text{A.2})$$

L'état  $|0\rangle$  est le "vide" construit avec tous les spins orientés up et l'opérateur  $\sigma^-$  crée un spin down à la position  $y$ . La première somme apparaissant dans l'expression ci-dessus permet de prendre en compte les différents domaines, dans lesquels les coordonnées  $y$  sont ordonnées d'une certaine façon entre le site 1 et le site  $M$ . La seconde somme prend en compte le nombre de permutations possibles pour placer les  $N$  coordonnées sur les  $M$  sites au sein de chaque domaine. Enfin, on définit les rapidités des quasi particules par  $\Lambda$ . La fonction d'onde  $\phi_N$  est donnée par

$$\begin{aligned} \phi_N = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\mathcal{P} \in S_N} \prod_{m < n} \frac{\sinh(\Lambda_{\mathcal{P}_m} - \Lambda_{\mathcal{P}_n} + \text{sgn}(y_n - y_m)\eta)}{\sinh(\Lambda_{\mathcal{P}_m} - \Lambda_{\mathcal{P}_n})} \\ \times \prod_{l=1}^N \frac{1}{\sinh(\Lambda_{\mathcal{P}_l} - \frac{\eta}{2})} \left( \frac{\sinh(\Lambda_{\mathcal{P}_l} + \frac{\eta}{2})}{\sinh(\Lambda_{\mathcal{P}_l} - \frac{\eta}{2})} \right)^{y_l - 1}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Pour effectuer les simulations DMRG nous utilisons un hamiltonien ferromagnétique et nous utilisons une transformation unitaire pour modifier le hamiltonien, une rotation de  $\pi$  dans le plan  $x - y$

$$H_F = W H_{AF} W^\dagger \quad \text{where } W = \prod_{k \text{ odd}} e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_k^z} = \prod_{k \text{ odd}} i\sigma_k^z, \quad (\text{A.4})$$

ce qui conduit à

$$H_F = -\frac{J}{4} \sum_{j=1}^M (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y - \Delta(\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - 1)) + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^M \sigma_j^z, \quad (\text{A.5})$$

nous avons utilisé les relations d'anti commutation sur le même site  $\{\sigma^\alpha, \sigma^\beta\} = 2\delta_{\alpha,\beta}$ .

Sous cette transformation les états propres deviennent

$$|\phi_N^F\rangle = W |\phi_N^{AF}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{1 \leq \{y\} \leq M} \sum_{\{\Lambda\}}^{C_M^N} \phi_N(\{\Lambda\}|\{y\}) \left( \prod_{k \text{ odd}} i\sigma_k^z \right) \times \sigma_{y_1}^- \dots \sigma_{y_N}^- |0\rangle. \quad (\text{A.6})$$

Pour simplifier cette expression nous supposons que  $M$  est pair et qu'il y a donc  $M/2$  sites. Si les coordonnées  $y$  tombent sur des sites impairs, l'opérateur  $\sigma^z$  donne un signe négatif en agissant sur le ket présent dans (A.6)

$$|\phi_N^F\rangle = W^\dagger |\phi_N^{AF}\rangle = \frac{e^{i\frac{\pi M}{4}}}{\sqrt{N!}} \sum_{1 \leq \{y\} \leq M} \sum_{\{\Lambda\}}^{C_M^N} \phi_N(\{\Lambda\}|\{y\}) \prod_{l=1}^N (-1)^{y_l} \times \sigma_{y_1}^- \dots \sigma_{y_N}^- |0\rangle. \quad (\text{A.7})$$

En imposant les conditions de bords périodiques, on obtient les équations de Bethe

$$e^{-i\tilde{p}(\Lambda_j)M} = \prod_{k \neq j}^N \frac{\sinh(\Lambda_j - \Lambda_k - \eta)}{\sinh(\Lambda_j - \Lambda_k + \eta)}, \quad (\text{A.8})$$

où nous avons introduit la rapidité pour une particule shiftée de  $\pi$ ,  $\tilde{p}(\Lambda_j) = p(\Lambda_j) + \pi$ .

D'après la référence [95], la rapidité et l'énergie à une particule vaut

$$\tilde{p}(\Lambda) = \pi - i \log \left( \frac{\sinh(\Lambda + \frac{\eta}{2})}{\sinh(\Lambda - \frac{\eta}{2})} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$e(\Lambda) = \frac{J \sinh^2(\eta)}{\cosh(2\Lambda) - \cosh(\eta)} - h \quad (\text{A.10})$$

En prenant la limite  $\eta \rightarrow i\pi$ , on peut alors retrouver les quantités physiques du modèle de Lieb-Liniger :

$$e^{i\lambda_j L} \prod_{k \neq j}^N \frac{\lambda_j - \lambda_k - ic}{\lambda_j - \lambda_k + ic} = 1 \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{p}(\lambda) = a\lambda. \quad (\text{A.12})$$

$$e(\lambda) = -\frac{\epsilon^2}{2} J + J \frac{a^2}{2} \lambda^2 - h. \quad (\text{A.13})$$

---

Le paramètre de maille  $a = \frac{\epsilon^2}{c}$  a été introduit pour faire le lien entre la taille du système du modèle de Lieb-Liniger  $L$  et le nombre de sites  $M$ ,  $L = M a$ , ainsi que les rapidités du gaz de Bose  $\lambda$  et celles de la chaîne XXZ  $\Lambda$ ,  $\Lambda = \frac{\epsilon}{c}\lambda$ . De plus, l'équation (A.13) suggère de poser  $J = \frac{1}{a^2}$  et  $\mu = h + \frac{c}{2a}$  pour retrouver l'énergie du gaz de Bose, avec  $\mu$  le potentiel chimique.

Pour finir, le hamiltonien utilisé dans les simulations DMRG peut s'écrire

$$H_F = -\frac{J}{4} \sum_{j=1}^M (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \cos(\epsilon) (\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - 1)) + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^M \sigma_j^z, \quad (\text{A.14})$$

ou plus simplement en notant  $\cos(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\epsilon)}}$  avec  $\epsilon = \sqrt{ca}$

$$H_F = -\frac{J}{2} \sum_{j=1}^M \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^M \frac{J}{1 + \frac{U}{2J}} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + \frac{MJ/4}{1 + \frac{U}{2J}} + \left( \frac{\mu}{2} + \frac{U}{4} \right) \sum_{j=1}^M \sigma_j^z. \quad (\text{A.15})$$

Ici nous avons défini la force d'interaction par unité de longueur  $U = c/a$ . Cette dernière relation est valide pour des interactions finies.

# Annexe B

## Résolution de l'équation (7.43)

Dans cette appendice nous décrivons en détails la méthode utilisée pour obtenir les solutions (7.48) et (7.55) correspondant respectivement aux pertes à un et deux corps.

### B.1 Pertes à un corps

L'évolution temporelle de la distribution de rapidité sous l'effet des pertes à un corps est donnée par l'équation suivante

$$\partial_t \rho = -\Gamma (\rho - (\rho^2 - \mathcal{H}(\rho)^2 - n^2(t)) + 2n(t)\mathcal{H}'(\rho)), \quad (\text{B.1})$$

avec  $\Gamma$  le taux de pertes et  $n(t) = n_0 e^{-\Gamma t}$  la densité moyenne de particules. Nous rappelons que pour une fonction périodique  $f(x)$ , la transformée de Hilbert s'écrit comme  $\mathcal{H}(f(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dy \frac{f(y)}{\tan(\frac{x-y}{2})}$ .

Pour résoudre l'équation d'évolution de la distribution de rapidité, nous reprenons la procédure utilisée dans la référence [34]. Ainsi, nous définissons une fonction à valeurs complexes dont la partie réelle est la distribution de rapidité et la partie imaginaire, la transformée de Hilbert de la distribution de rapidité :  $Q = \rho(k) + i\mathcal{H}(\rho(k))$ . Cette fonction  $Q$  peut être continuée analytiquement dans le demi plan complexe supérieur et s'écrit  $Q(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq \rho(q)}{\tan(\frac{z-q}{2})}$  pour  $\text{Im}(z) > 0$  et  $\text{Re}(z) \in [-\pi, \pi]$ . On peut montrer que cette dernière expression se réduit à  $\rho(k)$  sur l'axe des réels.

A présent, prenons la transformée de Hilbert de la relation (B.1)

$$\partial_t \mathcal{H}(\rho) = -\Gamma (\mathcal{H}(\rho) - \mathcal{H}(\rho^2 - \mathcal{H}(\rho)^2) + 2n(t)\mathcal{H}(\mathcal{H}'(\rho))) \quad (\text{B.2})$$

et construisons l'équation d'évolution de la fonction  $Q$  en ajoutant (B.1) et i (B.2)

$$\partial_\tau Q(\tau, z) = -(Q(\tau, z) - i2n\partial_z Q(\tau, z) - Q^2(\tau, z) + n^2(\tau)). \quad (\text{B.3})$$

Nous avons introduit la quantité adimensionnée  $\tau = \Gamma t$  et utilisé les propriétés de la transformée de Hilbert [108] :  $\mathcal{H}(\mathcal{H}(f)) = -f$  et  $\mathcal{H}'(f) = \mathcal{H}(f')$ . Une autre identité que nous avons utilisé pour obtenir (B.3) vient du fait que  $Q^2(z)$  est analytique dans le demi plan supérieur à condition que  $\mathcal{H}(\rho^2 - \mathcal{H}(\rho)^2) = 2\rho\mathcal{H}(\rho)$ .

Nous pouvons simplifier davantage l'équation (B.3) en posant  $Y(\tau, z) = Q(\tau, z + i2n(\tau))$

$$\partial_\tau Y(\tau, z) = Y^2(\tau, z) - Y(\tau, z) - n^2(\tau). \quad (\text{B.4})$$

Connaissant la forme de la densité moyenne  $n(t)$ , on peut résoudre l'équation pour  $Y(\tau, z)$  à l'aide du changement de variable  $Y(\tau, z) = \alpha(\tau, z) e^{-\tau}$ . On obtient alors l'équation

$$\partial_\tau \alpha(\tau, z) = (\alpha^2(\tau, z) - n_0^2) e^{-\tau}, \quad (\text{B.5})$$

qui peut s'intégrer comme

$$\int \frac{d\alpha}{\alpha^2 - n_0^2} = -e^{-\tau} + C_1, \quad (\text{B.6})$$

et conduit à

$$\alpha(\tau, z) = n_0 \tanh(n_0 e^{-\tau} + C_2). \quad (\text{B.7})$$

La constante  $C_2$  est alors déterminée par la condition initiale  $Y(0, z) = Y_0$  :  $C_2 = \tanh^{-1}(Y_0/n_0) - n_0$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} Y(\tau, z) &= n(\tau) \tanh(n_0(e^{-\tau} - 1) + \tanh^{-1}(Y_0/n_0)) \\ &= n(\tau) \left( \frac{\tanh(n_0(e^{-\tau} - 1)) + Y_0/n_0}{1 + \tanh(n_0(e^{-\tau} - 1))Y_0/n_0} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

et finalement, on en déduit la distribution de rapidité  $\rho(k, t)$

$$\rho(t, k) = n_0 e^{-\Gamma t} \operatorname{Re} \left( \frac{\tanh(n_0(e^{-\Gamma t} - 1)) + \frac{i}{2\pi n_0} \int_{-\pi}^{\pi} dq \frac{\rho_0(q)}{\tan(\frac{k-q}{2} + in_0(1 - e^{-\Gamma t}))}}{1 + \frac{i}{2\pi n_0} \tanh(n_0(e^{-\Gamma t} - 1)) \int_{-\pi}^{\pi} dq \frac{\rho_0(q)}{\tan(\frac{k-q}{2} + in_0(1 - e^{-\Gamma t}))}} \right). \quad (\text{B.9})$$

## B.2 Pertes à deux corps

Dans le cas particulier où nous ne considérons que des distributions de rapidité paires (invariantes si on change  $k \rightarrow -k$ ), l'équation d'évolution de  $\rho(k, t)$  sous l'effet des pertes à deux corps est donnée par

$$\partial_t \rho(k, t) = -2\Gamma \rho(k) n(t) + \frac{\Gamma}{\pi} \cos(k) \rho(k) \int_{-\pi}^{\pi} dq \cos(q) \rho(q). \quad (\text{B.10})$$

En utilisant la relation entre la densité moyenne de particules et la distribution de rapidité  $n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \rho(k, t)$ , on peut déduire de l'équation d'évolution de  $\rho(k, t)$  celle de  $n(t)$

$$\begin{aligned} \partial_t n(t) &= -\frac{2\Gamma n(t)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(k, t) dk + \frac{\Gamma}{2\pi^2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k) \rho(k, t) dk \right)^2 \\ &= -2\Gamma n(t)^2 + \frac{\Gamma}{2\pi^2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k) \rho(k, t) dk \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Si on isole le premier mode de Fourier de  $\rho(k, t)$ , on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k) \rho(k, t) dk = \sigma \pi \sqrt{\frac{2}{\Gamma} (\partial_t n(t) + 2\Gamma n(t)^2)}, \quad (\text{B.12})$$



où nous avons introduit  $\sigma$  le signe du premier mode de Fourier de la distribution de rapidité à l'instant initial,  $\sigma = \text{sgn}(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k)\rho_0(k)dk)$ . L'introduction de cette quantité repose sur deux points. D'une part, l'équation (B.10) montre que la distribution de rapidité à un instant  $t$  dépend explicitement du premier mode de Fourier de la distribution de rapidité à l'instant précédent. Cela signifie que si, à un moment donné, le premier mode de Fourier de  $\rho(k, t)$  s'annule alors il restera nul à tout temps ultérieurs. D'autre part, la quantité  $\sigma$  ne peut prendre que deux valeurs,  $\sigma = \pm 1$ . Or selon la première assertion, le premier mode de Fourier varie de manière continue jusqu'à annulation. Donc le signe du premier mode de Fourier de la distribution de rapidité initiale est constant au cours du temps.

En utilisant la relation (B.12), on peut écrire l'équation (B.10) comme

$$\dot{\rho}(k, t) = -2\Gamma \rho(k) n(t) + \Gamma \sigma \cos(k) \rho(k) \sqrt{\frac{2}{\Gamma} (\partial_t n(t) + 2\Gamma n(t)^2)}. \quad (\text{B.13})$$

En passant le terme  $\rho(k, t)$  dans le membre de gauche, on obtient après intégration par rapport au temps

$$\ln \left( \frac{\rho(k, t)}{\rho_0(k)} \right) = -2\Gamma \int_0^t n(t') dt' + \Gamma \sigma_0 \cos(k) \int_0^t \sqrt{\frac{2}{\Gamma} (\partial_{t'} n(t') + 2\Gamma n(t')^2)} dt', \quad (\text{B.14})$$

ce qui conduit au résultat final écrit en (7.55)

$$\rho(k, t) = \rho_0(k) \exp \left\{ -2\Gamma \int_0^t n(t') dt' + \sigma_0 \cos(k) \int_0^t \sqrt{\frac{2 (\partial_{t'} n(t') + 2\Gamma n(t')^2)}{\Gamma}} dt' \right\}. \quad (\text{B.15})$$

# Annexe C

## Effet de la température sur le premier mode de Fourier de $\rho_0(k)$

### C.1 Contexte

Pour les pertes à deux corps, nous avons montré numériquement et analytiquement que le comportement aux temps longs de la densité moyenne de particule  $n(t)$  est relié au premier mode de Fourier de la distribution de rapidité initiale  $\rho_0(k)$ .

$$\mathcal{F}[\rho_0(k)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \cos(k) \rho_0(k). \quad (\text{C.1})$$

Nous avons établis que la distribution de rapidité au temps  $t$  est donnée par la relation suivante

$$\rho(k, t) = \rho_0(k) e^{-2\Gamma g(t)} e^{2\Gamma \cos(k) f(t)}, \quad (\text{C.2})$$

où  $g(t) = \int_0^t d\tau n(\tau)$  et  $f(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \frac{\partial_\tau n(\tau)}{2\Gamma n(\tau)^2}} n(\tau) d\tau$ . Pour des distributions de rapidité dont le premier mode de Fourier est nul, la fonction  $f(t)$  s'annule et la densité se comporte en  $\sim 1/t$  aux longs temps. Dans le cas contraire, on peut montrer que la quantité  $f(t) - g(t)$  est proportionnelle à  $\ln(t)$ , ce qui conduit à  $n(t) \sim t^{-1/2}$ .

Ici notre objectif est de décrire le comportement du premier mode de Fourier de distributions thermiques  $\rho_0(k, T) = (1 + \exp(-\cos(k)/T))^{-1}$  et de donner un critère qualitatif pour identifier les lois de puissance auxquelles obéit la densité moyenne de particule..

#### C.1.1 Régime de hautes températures

Nous étudions le régime des hautes températures  $T \gg 1$  de la distribution de Fermi-Dirac, qui s'obtient facilement en développant en série de Taylor l'exponentielle

$$(1 + \exp(-\cos(k)/T))^{-1} \approx \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\cos^p(k)}{p! T^p} \right). \quad (\text{C.3})$$

Dans ce régime de températures, le premier mode de Fourier de la distribution de Fermi-Dirac est donné par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{\cos(k)}{1 + \exp(-\cos(k)/T)} &= -\frac{1}{8\pi} \sum_{p \text{ odd}} (-1)^p \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{\cos^{p+1}(k)}{p! T^p} \\ &= \frac{1}{\sqrt{16\pi}} \sum_{p \text{ odd}} \frac{1}{p! T^p} \frac{\Gamma((p+2)/2)}{\Gamma((p+3)/2)}, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

où  $\Gamma(x)$  désigne la fonction gamma d'Euler.

### C.1.2 Régime de basses températures

Dans ce régime, nous utilisons le développement de Sommerfeld de la distribution de Fermi-Dirac

$$(1 + \exp(-\cos(k)/T))^{-1} \approx \theta_H(\cos(k)) - \frac{\pi^2}{6} T^2 \delta^{(1)}(\cos(k)) - \frac{7\pi^4}{360} T^4 \delta^{(3)}(\cos(k)), \quad (\text{C.5})$$

avec  $\theta_H$  la fonction de Heaviside et  $\delta^{(n)}(x)$  la dérivée  $n$ -ième de la fonction de Dirac  $\delta(x)$ . Le premier mode de Fourier est alors déterminé en utilisant la propriété  $\int dx \delta^{(n)}(x) h(x) = (-1)^n h^{(n)}(x)$ . Finalement, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{\cos(k)}{1 + \exp(-\cos(k)/T)} = \frac{1}{2\pi} \left( 2 - \frac{\pi^2}{6} T^2 + \frac{7\pi^4}{360} T^4 \right). \quad (\text{C.6})$$

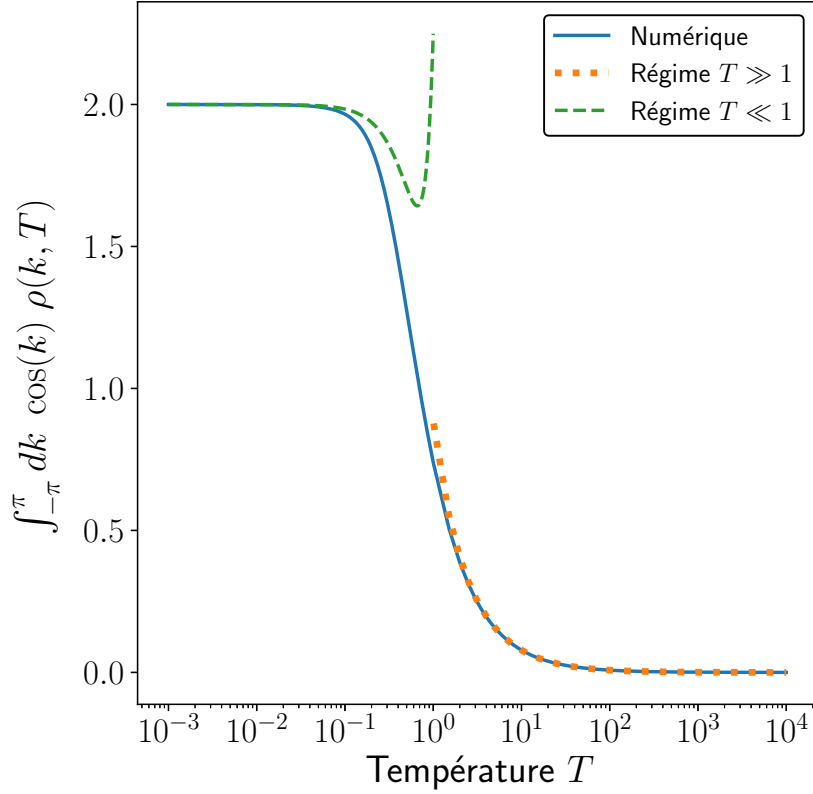


FIGURE C.1 – Allure du premier mode de Fourier de la distribution de rapidité initiale en fonction de la température  $T$ . La courbe bleue est obtenue numériquement en considérant des distributions thermiques de diverses températures. Les courbes en pointillés verts et oranges correspondent respectivement aux résultats analytiques pour le régime de faibles et hautes températures.

Comme on peut le voir sur la figure Fig. (C.1), le premier mode de Fourier de ces distributions de Fermi-Dirac passe de manière continue de la valeur 2 pour les faibles température à zéro pour les hautes températures. Nos formules analytiques reproduisent assez bien les régimes correspondant. En particulier, on voit que pour une température proche de 1, l'accord entre le numérique et l'analytique devient moins bon. Ce que l'on peut dire c'est que pour des températures faibles ( $T < 1$ ), on devrait observer un comportement en  $\sim 1/\sqrt{t}$  pour la densité moyenne de particule, mais aussi le crossover entre  $t^{-1/2}$  et  $t$ . Pour  $T \geq 1$  on devrait plutôt observer que le crossover entre les deux lois de puissance arrive de plus en plus tard.

# Bibliographie

- [1] E. H. Lieb and W. Liniger, “Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State,” *Physical Review*, vol. **130**, 1605, (1963). doi:[10.1103/PhysRev.130.1605](https://doi.org/10.1103/PhysRev.130.1605).
- [2] E. Haller, M. Gustavsson, M. J. Mark, J. G. Danzl, R. Hart, G. Pupillo, and H.-C. Nägerl, “Realization of an Excited, Strongly Correlated Quantum Gas Phase,” *Science*, vol. **325**, pp. 1224–1227, Sept. (2009). doi:[10.1126/science.1175850](https://doi.org/10.1126/science.1175850).
- [3] B. Fang, G. Carleo, A. Johnson, and I. Bouchoule, “Quench-Induced Breathing Mode of One-Dimensional Bose Gases,” *Physical Review Letters*, vol. **113**, p. 035301, July (2014). doi:[10.1103/PhysRevLett.113.035301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.035301).
- [4] A. I. Gudyama, G. E. Astrakharchik, and M. B. Zvonarev, “Reentrant behavior of the breathing-mode-oscillation frequency in a one-dimensional Bose gas,” *Physical Review A*, vol. **92**, p. 021601, Aug. (2015). doi:[10.1103/PhysRevA.92.021601](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.021601).
- [5] A. Imambekov, C. J. Bolech, M. Lukin, and E. Demler, “Breakdown of the local density approximation in interacting systems of cold fermions in strongly anisotropic traps,” *Physical Review A*, vol. **74**, p. 053626, Nov. (2006). doi:[10.1103/PhysRevA.74.053626](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.053626).
- [6] B. Doyon, “Lecture notes on Generalised Hydrodynamics,” *SciPost Physics Lecture Notes*, p. 018, Aug. (2020). doi:[10.21468/SciPostPhysLectNotes.18](https://doi.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.18).
- [7] M. D. Girardeau and E. M. Wright, “Breakdown of Time-Dependent Mean-Field Theory for a One-Dimensional Condensate of Impenetrable Bosons,” *Physical Review Letters*, vol. **84**, pp. 5239–5242, June (2000). doi:[10.1103/PhysRevLett.84.5239](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.5239).
- [8] F. Riggio, Y. Brun, D. Karevski, A. Faribault, and J. Dubail, “Gradient corrections to the local-density approximation in the one-dimensional Bose gas,” *Physical Review A*, vol. **106**, Nov. (2022). doi:[10.1103/PhysRevA.106.053309](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.106.053309).
- [9] D. van Delft and P. Kes, “The discovery of superconductivity,” *Physics Today*, vol. **63**, pp. 38–43, Sept. (2010). doi:[10.1063/1.3490499](https://doi.org/10.1063/1.3490499).
- [10] S. Bose, “Planck’s law and the light quantum hypothesis,” *Journal of Astrophysics and Astronomy*, vol. **15**, pp. 3–7, Mar. (1994). doi:[10.1007/BF03010400](https://doi.org/10.1007/BF03010400).
- [11] P. Kapitza, “Viscosity of Liquid Helium below the  $\lambda$ -Point,” *Nature*, vol. **141**, pp. 74–74, Jan. (1938). doi:[10.1038/141074a0](https://doi.org/10.1038/141074a0).
- [12] J. F. Allen and A. D. Misener, “Flow Phenomena in Liquid Helium II,” *Nature*, vol. **142**, pp. 643–644, Oct. (1938). doi:[10.1038/142643a0](https://doi.org/10.1038/142643a0).
- [13] F. London, “On the Bose-Einstein Condensation,” *Physical Review*, vol. **54**, pp. 947–954, Dec. (1938). doi:[10.1103/PhysRev.54.947](https://doi.org/10.1103/PhysRev.54.947).
- [14] L. Tisza, “The Theory of Liquid Helium,” *Physical Review*, vol. **72**, pp. 838–854, Nov. (1947). doi:[10.1103/PhysRev.72.838](https://doi.org/10.1103/PhysRev.72.838).

- 
- [15] L. Landau, “Theory of the Superfluidity of Helium II,” *Physical Review*, vol. **60**, pp. 356–358, Aug. (1941). doi:[10.1103/PhysRev.60.356](https://doi.org/10.1103/PhysRev.60.356).
- [16] N. Bogolubov, “ON THE THEORY OF SUPERFLUIDITY,” *J. Phys. USSR*, vol. **11**, no. 23, (1947).
- [17] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, “Theory of Superconductivity,” *Physical Review*, vol. **108**, pp. 1175–1204, Dec. (1957). doi:[10.1103/PhysRev.108.1175](https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.1175).
- [18] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor,” *Science, New Series*, vol. **269**, no. 5221, pp. 198–201, (1995).
- [19] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, “Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms,” *Physical Review Letters*, vol. **75**, pp. 3969–3973, Nov. (1995). doi:[10.1103/PhysRevLett.75.3969](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.3969).
- [20] H. F. Hess, “Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen,” *Physical Review B*, vol. **34**, pp. 3476–3479, Sept. (1986). doi:[10.1103/PhysRevB.34.3476](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.34.3476).
- [21] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. A. Joffe, M. R. Andrews, and W. Ketterle, “Evaporative Cooling of Sodium Atoms,” *Physical Review Letters*, vol. **74**, pp. 5202–5205, June (1995). doi:[10.1103/PhysRevLett.74.5202](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.5202).
- [22] W. Ketterle and N. V. Druten, “Evaporative Cooling of Trapped Atoms,” in *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. **37**, pp. 181–236, Elsevier, (1996). doi:[10.1016/S1049-250X\(08\)60101-9](https://doi.org/10.1016/S1049-250X(08)60101-9).
- [23] J. Mendonça and H. Terças, *Physics of Ultra-Cold Matter*, vol. **70** of *Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics*. New York, NY : Springer New York, (2013). doi:[10.1007/978-1-4614-5413-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5413-7).
- [24] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Mécanique quantique. Savoirs actuels*, Les Ulis Paris : EDP sciences CNRS éditions, (2019).
- [25] H. Bethe, “Zur Theorie der Metalle,” *Zeitschrift für Physik*, vol. **71**, pp. 205–226, Mar. (1931). doi:[10.1007/BF01341708](https://doi.org/10.1007/BF01341708).
- [26] F. D. M. Haldane, “‘Luttinger liquid theory’ of one-dimensional quantum fluids. I. Properties of the Luttinger model and their extension to the general 1D interacting spinless Fermi gas,” *Journal of Physics C : Solid State Physics*, vol. **14**, pp. 2585–2609, July (1981). doi:[10.1088/0022-3719/14/19/010](https://doi.org/10.1088/0022-3719/14/19/010).
- [27] J. Voit, “One-Dimensional Fermi liquids,” *Reports on Progress in Physics*, vol. **58**, 9510014, (1995). doi:[10.1088/0034-4885/58/9/002](https://doi.org/10.1088/0034-4885/58/9/002).
- [28] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, “A quantum Newton’s cradle,” *Nature*, vol. **440**, pp. 900–903, Apr. (2006). doi:[10.1038/nature04693](https://doi.org/10.1038/nature04693).
- [29] B. Bertini, M. Collura, J. De Nardis, and M. Fagotti, “Transport in Out-of-Equilibrium X X Z Chains : Exact Profiles of Charges and Currents,” *Physical Review Letters*, vol. **117**, p. 207201, Nov. (2016). doi:[10.1103/PhysRevLett.117.207201](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.207201).
- [30] O. A. Castro-Alvaredo, B. Doyon, and T. Yoshimura, “Emergent Hydrodynamics in Integrable Quantum Systems Out of Equilibrium,” *Physical Review X*, vol. **6**, p. 041065, Dec. (2016). doi:[10.1103/PhysRevX.6.041065](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.6.041065).
- [31] Z. N.-C. Ha, *Quantum many-body systems in one dimension*. No. v. 12 in Series on advances in statistical mechanics, Singapore ; New Jersey : World Scientific, (1996).

- 
- [32] B. Sutherland, *Beautiful models : 70 years of exactly solved quantum many-body problems*. River Edge, N.J : World Scientific, (2004). OCLC : ocm56719322.
- [33] E. H. Lieb, “Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. II. The Excitation Spectrum,” *Physical Review*, vol. **130**, 1616, (1963). doi:[10.1103/PhysRev.130.1616](https://doi.org/10.1103/PhysRev.130.1616).
- [34] I. Bouchoule, B. Doyon, and J. Dubail, “The effect of atom losses on the distribution of rapidities in the one-dimensional Bose gas,” *SciPost Phys.* *9*, 044, June (2020). doi:[10.21468/SciPostPhys.9.4.044](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.9.4.044).
- [35] I. Bouchoule, L. Dubois, and L.-P. Barbier, “Losses in interacting quantum gases : ultra-violet divergence and its regularization,” *arXiv :2106.06236 [cond-mat]*, June 2021. arXiv : 2106.06236.
- [36] J. J. García-Ripoll, S. Dürr, N. Syassen, D. M. Bauer, M. Lettner, G. Rempe, and J. I. Cirac, “Dissipation-induced hard-core boson gas in an optical lattice,” *New Journal of Physics*, vol. **11**, p. 013053, Jan. (2009). doi:[10.1088/1367-2630/11/1/013053](https://doi.org/10.1088/1367-2630/11/1/013053).
- [37] D. Rossini, A. Ghermaoui, M. B. Aguilera, R. Vatré, R. Bouganne, J. Beugnon, F. Gerbier, and L. Mazza, “Strong correlations in lossy one-dimensional quantum gases : from the quantum Zeno effect to the generalized Gibbs ensemble,” *Physical Review A*, vol. **103**, p. L060201, June (2021). doi:[10.1103/PhysRevA.103.L060201](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.L060201).
- [38] L. Rosso, A. Biella, and L. Mazza, “The one-dimensional Bose gas with strong two-body losses : the effect of the harmonic confinement,” *SciPost Physics*, vol. **12**, p. 044, Jan. (2022). doi:[10.21468/SciPostPhys.12.1.044](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.12.1.044).
- [39] D. M. Harber, J. M. McGuirk, J. M. Obrecht, and E. A. Cornell, “Thermally Induced Losses in Ultra-Cold Atoms Magnetically Trapped Near Room-Temperature Surfaces,” *Journal of Low Temperature Physics*, vol. **133**, pp. 229–238, Nov. (2003). doi:[10.1023/A:1026084606385](https://doi.org/10.1023/A:1026084606385).
- [40] V. S. Shchesnovich and D. S. Mogilevtsev, “Three-site Bose-Hubbard model subject to atom losses : Boson-pair dissipation channel and failure of the mean-field approach,” *Physical Review A*, vol. **82**, p. 043621, Oct. (2010). doi:[10.1103/PhysRevA.82.043621](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.043621).
- [41] A. Bastianello, A. De Luca, B. Doyon, and J. De Nardis, “Thermalization of a Trapped One-Dimensional Bose Gas via Diffusion,” *Physical Review Letters*, vol. **125**, p. 240604, Dec. (2020). doi:[10.1103/PhysRevLett.125.240604](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.240604).
- [42] M. Olshanii and V. Dunjko, “Short-Distance Correlation Properties of the Lieb-Liniger System and Momentum Distributions of Trapped One-Dimensional Atomic Gases,” *Physical Review Letters*, vol. **91**, p. 090401, Aug. (2003). doi:[10.1103/PhysRevLett.91.090401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.090401).
- [43] I. Bouchoule and J. Dubail, “Breakdown of tan’s relation in lossy one-dimensional bose gases,” *Physical Review Letters*, vol. **126**, no. 16, p. 160603, (2021). doi:[10.1103/PhysRevLett.126.160603](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.160603).
- [44] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, “Observation of a One-Dimensional Tonks-Girardeau Gas,” *Science*, vol. **305**, pp. 1125–1128, Aug. (2004). doi:[10.1126/science.1100700](https://doi.org/10.1126/science.1100700).
- [45] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I. Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hänsch, and I. Bloch, “Tonks–Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice,” *Nature*, vol. **429**, pp. 277–281, May (2004). doi:[10.1038/nature02530](https://doi.org/10.1038/nature02530).

- 
- [46] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*. Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge : Cambridge Univ. Press, digital print ed., (2005). OCLC : 830659633.
- [47] G. Lang, F. Hekking, and A. Minguzzi, “Ground-state energy and excitation spectrum of the Lieb-Liniger model : accurate analytical results and conjectures about the exact solution,” *SciPost Physics*, vol. **3**, p. 003, July (2017). doi:[10.21468/SciPostPhys.3.1.003](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.3.1.003).
- [48] L. Tonks, “The Complete Equation of State of One, Two and Three-Dimensional Gases of Hard Elastic Spheres,” *Physical Review*, vol. **50**, pp. 955–963, Nov. (1936). doi:[10.1103/PhysRev.50.955](https://doi.org/10.1103/PhysRev.50.955).
- [49] M. Girardeau, “Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. **1**, pp. 516–523, (1960). doi:[10.1063/1.1703687](https://doi.org/10.1063/1.1703687).
- [50] Z. Ristivojevic, “Excitation Spectrum of the Lieb-Liniger Model,” *Physical Review Letters*, vol. **113**, p. 015301, July (2014). doi:[10.1103/PhysRevLett.113.015301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.015301).
- [51] G. Lang, “Conjectures about the structure of strong- and weak-coupling expansions of a few ground-state observables in the Lieb-Liniger and Yang-Gaudin models,” *SciPost Physics*, vol. **7**, p. 055, Oct. (2019). doi:[10.21468/SciPostPhys.7.4.055](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.7.4.055).
- [52] C. N. Yang and C. P. Yang, “Thermodynamics of a One-Dimensional System of Bosons with Repulsive Delta-Function Interaction,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 10, pp. 1115–1122, July 1969.
- [53] V. N. Popov, “On the theory of the superfluidity of two- and one-dimensional bose systems,” *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. **11**, pp. 565–573, June (1972). doi:[10.1007/BF01028373](https://doi.org/10.1007/BF01028373).
- [54] C. Mora and Y. Castin, “Extension of bogoliubov theory to quasi-condensates,” *Physical Review A*, vol. **67**,053615, (2003). doi:[10.1103/PhysRevA.67.053615](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.053615).
- [55] D. Petrov, D. M. Gangardt, and G. V. Shlyapnikov, “Low-dimensional trapped gases,” vol. **116**, pp. 5–44, (2004).
- [56] J. Oliva, “Density profile of the weakly interacting bose gas confined in a potential well : Nonzero temperature,” *Physical Review B*, vol. **39**, pp. 4197–4203, (1989). doi:[10.1103/PhysRevB.39.4197](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.39.4197).
- [57] V. Dunjko, V. Lorent, and M. Olshanii, “Bosons in Cigar-Shaped Traps : Thomas-Fermi Regime, Tonks-Girardeau Regime, and In Between,” *Physical Review Letters*, vol. **86**, pp. 5413–5416, June (2001). doi:[10.1103/PhysRevLett.86.5413](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.5413).
- [58] B. Schmidt and M. Fleischhauer, “Exact numerical simulations of a one-dimensional, trapped Bose gas,” *Physical Review A*, vol. **75**, Feb. (2007). doi:[10.1103/PhysRevA.75.021601](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.021601).
- [59] G. E. Astrakharchik, “Local density approximation for a perturbative equation of state,” *Physical Review A*, vol. **72**, p. 063620, Dec. (2005). doi:[10.1103/PhysRevA.72.063620](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.063620).
- [60] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, “Theory of ultracold Fermi gases,” *Reviews of Modern Physics*, vol. **80**, no. 4, pp. 1215–1274, (2008). doi:[10.1103/RevModPhys.80.1215](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1215).
- [61] J.-M. Stéphan, “Free fermions at the edge of interacting systems,” *SciPost Physics*, vol. **6**, p. 057, May (2019). doi:[10.21468/SciPostPhys.6.5.057](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.6.5.057).



- 
- [62] P. Pedri and L. Santos, “Three-Dimensional Quasi-Tonks Gas in a Harmonic Trap,” *Physical Review Letters*, vol. **91**, p. 110401, Sept. (2003). doi:[10.1103/PhysRevLett.91.110401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.110401).
- [63] H. Moritz, T. Stöferle, M. Köhl, and T. Esslinger, “Exciting Collective Oscillations in a Trapped 1D Gas,” *Physical Review Letters*, vol. **91**, p. 250402, Dec. (2003). doi:[10.1103/PhysRevLett.91.250402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.250402).
- [64] I. Bouchoule, K. V. Kheruntsyan, and G. V. Shlyapnikov, “Interaction-induced crossover versus finite-size condensation in a weakly interacting trapped one-dimensional Bose gas,” *Physical Review A*, vol. **75**, p. 031606, Mar. (2007). doi:[10.1103/PhysRevA.75.031606](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.031606).
- [65] F. A. Bayocboc, Jr. and K. V. Kheruntsyan, “Frequency beating and damping of breathing oscillations of a harmonically trapped one-dimensional quasicondensate,” *Comptes Rendus. Physique*, vol. **24**, pp. 1–24, Mar. (2023). doi:[10.5802/crphys.131](https://doi.org/10.5802/crphys.131).
- [66] C. Menotti and S. Stringari, “Collective oscillations of a one-dimensional trapped Bose-Einstein gas,” *Physical Review A*, vol. **66**, p. 043610, Oct. (2002). doi:[10.1103/PhysRevA.66.043610](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.66.043610).
- [67] W. Ketterle, Y. Shin, A. Schirotzek, and C. H. Schunk, “Superfluidity in a gas of strongly interacting fermions,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, vol. **21**, p. 164206, Mar. (2009). doi:[10.1088/0953-8984/21/16/164206](https://doi.org/10.1088/0953-8984/21/16/164206).
- [68] G. B. Partridge, W. Li, R. I. Kamar, Y.-a. Liao, and R. G. Hulet, “Pairing and Phase Separation in a Polarized Fermi Gas,” *Science*, vol. **311**, pp. 503–505, Jan. (2006). doi:[10.1126/science.1122876](https://doi.org/10.1126/science.1122876).
- [69] T. N. De Silva and E. J. Mueller, “Profiles of near-resonant population-imbalanced trapped Fermi gases,” *Physical Review A*, vol. **73**, p. 051602, May (2006). doi:[10.1103/PhysRevA.73.051602](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.051602).
- [70] W. Yang, “Gradient correction in Thomas-Fermi theory,” *Physical Review A*, vol. **34**, pp. 4575–4585, Dec. (1986). doi:[10.1103/PhysRevA.34.4575](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.34.4575).
- [71] G. Lindblad, “On the generators of quantum dynamical semigroups,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. **48**, pp. 119–130, June (1976). doi:[10.1007/BF01608499](https://doi.org/10.1007/BF01608499).
- [72] F. Verstraete, M. M. Wolf, and J. Ignacio Cirac, “Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation,” *Nature Physics*, vol. **5**, pp. 633–636, Sept. (2009). doi:[10.1038/nphys1342](https://doi.org/10.1038/nphys1342).
- [73] H. Wichterich, M. J. Henrich, H.-P. Breuer, J. Gemmer, and M. Michel, “Modeling heat transport through completely positive maps,” *Physical Review E*, vol. **76**, p. 031115, Sept. (2007). doi:[10.1103/PhysRevE.76.031115](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.031115).
- [74] T. Prosen, “Open X X Z Spin Chain : Nonequilibrium Steady State and a Strict Bound on Ballistic Transport,” *Physical Review Letters*, vol. **106**, p. 217206, May (2011). doi:[10.1103/PhysRevLett.106.217206](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.217206).
- [75] L. Rosso, D. Rossini, A. Biella, and L. Mazza, “One-dimensional spin-1/2 fermionic gases with two-body losses : weak dissipation and spin conservation,” *arXiv :2104.07929 [cond-mat, physics:quant-ph]*, Apr. 2021. arXiv : 2104.07929.
- [76] D. Manzano, “A short introduction to the Lindblad master equation,” *AIP Advances*, vol. **10**, p. 025106, Feb. (2020). doi:[10.1063/1.5115323](https://doi.org/10.1063/1.5115323).

- 
- [77] D. Karevski, *Physique quantique des champs et des transitions de phase : avec exercices corrigés*. Références sciences, Paris : Ellipses, 2022.
- [78] E. Wigner, “On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium,” *Physical Review*, vol. **40**, pp. 749–759, June (1932). doi:[10.1103/PhysRev.40.749](https://doi.org/10.1103/PhysRev.40.749).
- [79] D. S. Dean, P. Le Doussal, S. N. Majumdar, and G. Schehr, “Wigner function of noninteracting trapped fermions,” *Physical Review A*, vol. **97**, p. 063614, June (2018). doi:[10.1103/PhysRevA.97.063614](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.063614).
- [80] J.-L. Basdevant, J. Dalibard, and M. Joffre, *Mécanique quantique*. Palaiseau [Paris] : les Éd. de l’École polytechnique diff. Ellipses, (2009).
- [81] W. T. Coffey, Y. P. Kalmykov, S. V. Titov, and B. P. Mulligan, “Wigner function approach to the quantum Brownian motion of a particle in a potential,” *Physical Chemistry Chemical Physics*, vol. **9**, no. 26, p. 3361, (2007). doi:[10.1039/b614554j](https://doi.org/10.1039/b614554j).
- [82] G. M. Beck and A. Sergi, “Quantum dynamics in the partial Wigner picture,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. **46**, p. 395305, Oct. (2013). doi:[10.1088/1751-8113/46/39/395305](https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/39/395305).
- [83] W. B. Case, “Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians,” *American Journal of Physics*, vol. **76**, pp. 937–946, Oct. (2008). doi:[10.1119/1.2957889](https://doi.org/10.1119/1.2957889).
- [84] E. Bettelheim and L. Glazman, “Quantum ripples over a semi-classical shock,” *Physical Review Letters*, vol. **109**, p. 260602, Dec. (2012). doi:[10.1103/PhysRevLett.109.260602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.260602).
- [85] H. Groenewold, “On the principles of elementary quantum mechanics,” *Physica*, vol. **12**, pp. 405–460, Oct. (1946). doi:[10.1016/S0031-8914\(46\)80059-4](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(46)80059-4).
- [86] F. S. Møller and J. Schmiedmayer, “Introducing iFluid : a numerical framework for solving hydrodynamical equations in integrable models,” *SciPost Physics*, vol. **8**, p. 041, Mar. (2020). doi:[10.21468/SciPostPhys.8.3.041](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.8.3.041).
- [87] A. Vogler, R. Labouvie, F. Stubenrauch, G. Barontini, V. Guarrera, and H. Ott, “Thermodynamics of strongly correlated one-dimensional Bose gases,” *Physical Review A*, vol. **88**, p. 031603, Sept. (2013). doi:[10.1103/PhysRevA.88.031603](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.031603).
- [88] L. Šamaj and J. K. Percus, “Recursion representation of gradient expansion for free fermion ground state in one dimension,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. **111**, pp. 1809–1814, Aug. (1999). doi:[10.1063/1.479450](https://doi.org/10.1063/1.479450).
- [89] M. Panfil and J. De Nardis, “Density form factors of the 1d bose gas for finite entropy states,” *J. Stat. Mech.*, vol. P02019, (2015). doi:[10.1088/1742-5468/2015/02/P02019](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2015/02/P02019).
- [90] L. Piroli and P. Calabrese, “Exact formulas for the form factors of local operators in the lieb-liniger model,” [*cond-mat, physics :math-ph*], vol. **48**, 454002, (2015). doi:[10.1088/1751-8113/48/45/454002](https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/45/454002).
- [91] N. A. Slavnov, “Algebraic Bethe ansatz,” [*math-ph*], (2019). [arXiv:1804.07350](https://arxiv.org/abs/1804.07350).
- [92] S. R. White, “Density matrix formulation for quantum renormalization groups,” *Physical Review Letters*, vol. **69**, pp. 2863–2866, Nov. (1992). doi:[10.1103/PhysRevLett.69.2863](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.2863).
- [93] Y. Brun and J. Dubail, “The inhomogeneous gaussian free field, with application to ground state correlations of trapped 1d bose gases,” *SciPost Phys*, vol. **4**, p. 037, (2018). doi:[10.21468/SciPostPhys.4.6.037](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.4.6.037).

- 
- [94] B. Golzer and A. Holz, “The nonlinear Schrodinger model as a special continuum limit of the anisotropic Heisenberg model,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. **20**, pp. 3327–3338, Aug. (1987). doi:[10.1088/0305-4470/20/11/035](https://doi.org/10.1088/0305-4470/20/11/035).
- [95] B. Pozsgay, “Local correlations in the 1d bose gas from a scaling limit of the xxz chain,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, Nov. (2011). doi:[10.1088/1742-5468/2011/11/P11017](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2011/11/P11017).
- [96] Browaeys, A., Poupard, J., Robert, A., Nowak, S., Rooijackers, W., Arimondo, E., Marcassa, L., Boiron, D., Westbrook, C. I., and Aspect, A., “Two body loss rate in a magneto-optical trap of metastable he,” *Eur. Phys. J. D*, vol. **8**, no. 2, pp. 199–203, (2000). doi:[10.1007/s100530050027](https://doi.org/10.1007/s100530050027).
- [97] L. Franchi, L. F. Livi, G. Cappellini, G. Binella, M. Inguscio, J. Catani, and L. Fallani, “State-dependent interactions in ultracold 174yb probed by optical clock spectroscopy,” *New Journal of Physics*, vol. 19, p. 103037, nov 2017. doi:[10.1088/1367-2630/aa8fb4](https://doi.org/10.1088/1367-2630/aa8fb4).
- [98] T. Tomita, S. Nakajima, I. Danshita, Y. Takasu, and Y. Takahashi, “Observation of the mott insulator to superfluid crossover of a driven-dissipative bose-hubbard system,” *Science Advances*, vol. 3, no. 12, p. e1701513, 2017. doi:[10.1126/sciadv.1701513](https://doi.org/10.1126/sciadv.1701513).
- [99] N. Syassen, D. M. Bauer, M. Lettner, T. Volz, D. Dietze, J. J. García-Ripoll, J. I. Cirac, G. Rempe, and S. Dürr, “Strong dissipation inhibits losses and induces correlations in cold molecular gases,” *Science*, vol. 320, no. 5881, pp. 1329–1331, 2008. doi:[10.1126/science.1155309](https://doi.org/10.1126/science.1155309).
- [100] R. Bause, A. Christianen, A. Schindewolf, I. Bloch, and X.-Y. Luo, “Ultracold Sticky Collisions : Theoretical and Experimental Status,” *The Journal of Physical Chemistry A*, vol. **127**, pp. 729–741, Jan. (2023). doi:[10.1021/acs.jpca.2c08095](https://doi.org/10.1021/acs.jpca.2c08095).
- [101] J. Söding, D. Guéry-Odelin, P. Desbiolles, F. Chevy, H. Inamori, and J. Dalibard, “Three-body decay of a rubidium bose–einstein condensate,” *Applied Physics B*, vol. 69, pp. 257–261, Oct 1999. doi:[10.1007/s003400050805](https://doi.org/10.1007/s003400050805).
- [102] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, “Three-body recombination at large scattering lengths in an ultracold atomic gas,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 123201, Sep 2003. doi:[10.1103/PhysRevLett.91.123201](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.123201).
- [103] F. c. Top, Y. Margalit, and W. Ketterle, “Spin-polarized fermions with p-wave interactions,” *Physical Review A*, vol. **104**, p. 043311, Oct. (2021). doi:[10.1103/PhysRevA.104.043311](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.043311).
- [104] F. Lange, Z. Lenarčič, and A. Rosch, “Time-dependent generalized Gibbs ensembles in open quantum systems,” *Phys. Rev. B*, vol. **97**, Jan. (2018). doi:[10.1103/PhysRevB.97.165138](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.165138).
- [105] F. Lange, Z. Lenarčič, and A. Rosch, “Pumping approximately integrable systems,” *Nature Communications*, vol. **8**, p. 15767, Jun (2017). doi:[10.1038/ncomms15767](https://doi.org/10.1038/ncomms15767).
- [106] Z. Lenarčič, F. Lange, and A. Rosch, “Perturbative approach to weakly driven many-particle systems in the presence of approximate conservation laws,” *Phys. Rev. B*, vol. **97**, p. 024302, Jan (2018). doi:[10.1103/PhysRevB.97.024302](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.024302).
- [107] G. Perfetto, F. Carollo, J. P. Garrahan, and I. Lesanovsky, “Reaction-limited quantum reaction-diffusion dynamics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 130, p. 210402, May 2023. doi:[10.1103/PhysRevLett.130.210402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.130.210402).

- 
- [108] P. L. Butzer and R. J. Nessel, *Fourier analysis and approximation*. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe, Bd. 40, Basel, Stuttgart : Birkhäuser, (1971).